

## Introducción al Álgebra MA1101



## Guía 12: Subgrupos, Anillos, y Cuerpos

**Resumen:**

- Sea  $(A, *)$  un grupo, y  $\emptyset \neq H \subseteq A$ . Diremos que  $(H, *)$  es **subgrupo**, si  $(H, *)$  es un grupo, o equivalentemente  $\forall x, y \in H \ x * y^{-1} \in H$ .

Sea  $(A, +, \cdot)$  un conjunto con dos estructuras:

- Se dice **anillo** si  $(A, +)$  es grupo abeliano, y además  $\cdot$  es asociativa, distribuye con respecto a  $+$ , y tiene neutro (distinto del de  $+$ ).

- Se dice **anillo conmutativo** si es un anillo, y  $\cdot$  es conmutativo.

- Sean  $x, y$  ambos no nulos. Si  $x \cdot y = 0$  se dice que  $x$  e  $y$  son **divisores del cero**.  
Notar que en este caso  $x \cdot a = x \cdot b \not\Rightarrow a = b$ .

- Se dice **cuerpo** si es un anillo conmutativo y  $\forall x \in A \setminus \{0\}$  es invertible para  $\cdot$ .

- $A$  cuerpo  $\Rightarrow A$  no tiene divisores del cero (cuidado que no es una equivalencia).

**P1.** Sea  $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ , dada por  $f(m) = 6m$ .

- Demuestre que  $f$  es homomorfismo.
- Para  $n \in \mathbb{N}$ , demuestre que  $n\mathbb{Z} = \{nz : z \in \mathbb{Z}\}$  es subgrupo de  $\mathbb{Z}$ .
- Demuestre que  $f(5\mathbb{Z})$  es subgrupo de lo que corresponda.
- Demuestre que  $f^{-1}(12\mathbb{Z})$  es subgrupo de lo que corresponda.

**P2.** Sean  $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , y  $G' = \{2^a 3^b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

- Demuestre que  $G'$  es subgrupo de  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  donde  $\cdot$  es el producto usual en  $\mathbb{R}$ .
- Considere  $+$  la suma por componentes en  $G$ , y observe que con ello  $(G, +)$  es grupo. Demuestre que  $(G, +)$  es isomorfo a  $(G', \cdot)$ .
- ¿Se mantiene el resultado anterior si se reemplaza 3 por 4 en la definición de  $G'$ ?

**P3.** Sean  $(A, +_A, \cdot_A), (B, +_B, \cdot_B)$  dos anillos, y considere  $(A \times B, +, \cdot)$ , donde las operaciones consisten en:

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a +_A c, b +_B d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (a \cdot_A c, b \cdot_B d).\end{aligned}$$

- Demuestre que  $(A \times B, +, \cdot)$  es un anillo.
- Demuestre que  $A \times B$  tiene divisores del cero, incluso si  $A$  y  $B$  no tienen.
- Sea  $F$  un cuerpo. ¿Es  $F \times F$  un cuerpo?

**P4.** Sea  $E$  un conjunto no vacío.

- Demuestre que  $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$  es un anillo. Para cada operación especifique cuál es el neutro, y cuál es el inverso de un conjunto  $A$ .
- Utilizando lo demostrado en la **P3**, demuestre que para  $\emptyset \neq A \subseteq E$ ,  $\mathcal{P}(E)$  es isomorfo a  $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A^c)$ , con las operaciones utilizadas en el ítem anterior, componente a componente.

**P5.** Sea  $(G, *)$  un grupo con neutro  $e$ . Para  $g \in G$ , se define  $\langle\{g\}\rangle = \{kg : k \in \mathbb{Z}\}$ , donde  $kg$  es el producto iterado, es decir:

$$kg = \begin{cases} e & \text{si } k = 0, \\ (k-1)g * g & \text{si } k \geq 1, \\ |k|(-g) & \text{si } k < 1. \end{cases}$$

- a) Sea  $G$  un grupo cualquiera, y  $g \in G$ . Demuestre que  $(\langle\{g\}\rangle, *)$  es un subgrupo de  $G$ .
- b) Demuestre que si  $f : (\langle\{g\}\rangle, *) \rightarrow (B, \Delta)$  es isomorfismo, entonces  $\exists b \in B$  tal que  $B = \langle\{b\}\rangle$ .
- c) Encuentre  $g \in \mathbb{Z}$  tal que  $\mathbb{Z} = \langle\{g\}\rangle$ , donde  $*$  sería la suma usual de  $\mathbb{Z}$ .