Introducción al Álgebra MA1101

Guía 15: Raíces y Factorización

P1. Dado el polinimio $P(x) = x^5 - 2x^2 + 1$, divídalo por el polinomio $D(x)$, para obtener $P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$. Haga explícito Q y R:

(a) $D(x) = x^5$

(b) $D(x) = x^2 - 3x + 1$

(c) $D(x) = x - 1$.

P2. Sea $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ un polinomio con raíces $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Muestre que

$$\alpha\beta\gamma = -c, \qquad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b, \qquad \alpha + \beta + \gamma = -a$$

P3. Considere el polinomio con coeficientes reales no nulos:

$$P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

(a) Demuestre que si P posee una raíz imaginaria pura entonces $a_1^2 + a_0a_3^2 = a_1a_2a_3$

(b) Encuentre $a_0, a_1, ..., a_3$ de manera que 2 sea raíz cuádruple de P.

P4. Factorice el polinomio $P(x) = x^4 + 1$ en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.

P5. Determina el polinomio mónico $P(x)$ de grado 3 tal que

- $P(2) = P(0) = 0$,
- el resto de dividir P por $x - 1$ es igual al resto de dividir P por $x - 3$.