Introducción al Álgebra MA1101

Guía 1: Lógica

Resumen:

- Leyes de De Morgan:
  $\overline{[p \vee q]} \Leftrightarrow [\overline{p} \wedge \overline{q}]$
  $\overline{[p \wedge q]} \Leftrightarrow [\overline{p} \vee \overline{q}]$
- Transitividad:
  $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
  $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
- Caracterización del Implica:
  $[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [\overline{p} \vee q]$
- Tabla del "o", del "y" y del "implica":
  $[(p \vee q) \Leftrightarrow F] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow F)$
  $[(p \wedge q) \Leftrightarrow V] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow V)$
  $[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow F] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow V \wedge q \Leftrightarrow F)$
- Contrarecíproca:
  $[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [\overline{q} \Rightarrow \overline{p}]$
- Caracterización de la Equivalencia:
  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

P1. Uno de los elementos más importantes que debes aprender a lo largo de los cursos de introducción, es aprender a pensar y desarrollar una demostración. A continuación se muestra una posible solución de un ejercicio, pero que está incompleta. ¡Intenta completarla!

Demuestre, sin usar tabla de verdad, que la siguiente proposición es una tautología:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$$

1) En este caso vamos a razonar por contradicción, es decir, en vez de demostrar que la proposición es siempre verdadera, vamos a ver que nunca es ______.
2) Entonces, supongamos que existen valores tales que la proposición es ______. De la materia de clases sabemos que una ______ lógica del estilo $a \Rightarrow b$ solo es ______ cuando a es ______ y b es ______.
3) En este caso consideramos ______________ como a, y ______________ como b.
4) Como estamos suponiendo que ______________ es falsa. Podemos concluir que $p \wedge r$ es ______, y ______ es falsa.
5) Para que una conjunción lógica sea ______________ es necesario que __________ sean(n) verdadera(s). Por lo tanto ______ es ______ y ______ es ______.
6) Por el otro lado, para que una conjunción sea ______, __________ de los elementos debe ser ______. Como a priori no sabemos cuál, deberemos ponernos en casos. Caso 1 sería q es ______, caso 2 sería s es ______.
7) Caso 1) q es ______. Pero si reemplazamos en "a" queda $(V \Rightarrow F) \wedge (V \Rightarrow s)$, por lo ya discutido esto es del estilo ______ $\wedge (V \Rightarrow s)$, lo que es ______, independiente del valor del ______.
8) Como habíamos asumido que "a" era verdadera, llegamos a una contradiccion.
9) El caso 2) ______ es ______, es análogo. Esto significa que la demostración es exactamente la misma del paso anterior pero cambiando p por ______, y ______ por s .
10) Como en todos los casos posibles se llegó a una contradicción, significa que la suposición original estaba incorrecta. Por lo tanto la afirmación no era ______, sino ______. Es decir, una tautología.

P2. Sabiendo que la siguiente proposición es falsa, ¿Puede determinar los valores de $p, q,$ y r?

$$[(p \vee q) \vee (p \wedge r)] \Rightarrow (q \vee r)$$

P3. Sin utilizar tabla de verdad, determine si son tautologías las siguientes proposiciones.

a) $[p \wedge (p \vee r)] \wedge [(q \vee p) \wedge (q \vee r)]$
b) $[p \Rightarrow q] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$

P4. Pruebe por contrarrecíproca que las siguientes proposiciones son verdaderas, para x, y, z enteros.

a) Si $3x^2 - 2x + 1$ es par, entonces x es impar. (Recuerde que un número par x se puede escribir de la manera $x = 2a$, donde a es algún entero.)

b) Si la fracción $\frac{xy}{z}$ no es entera, entonces ni $\frac{x}{z}$ ni $\frac{y}{z}$ es entero.

P5. Demuestre, sin utilizar tabla de verdad, que las siguientes proposiciones son tautologías.

a) $[(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

b) $[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p] \Leftrightarrow p \wedge q$