Introducción al Álgebra MA1101

Guía 3: Conjuntos

Resumen:

I. **Definiciones básicas:**

- $\exists x \in E, x \in \emptyset \Leftrightarrow F$.
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B$.
- $A = B \Leftrightarrow \forall x \in E, x \in A \Leftrightarrow x \in B$.
- $\forall x \in E, x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.
- $\forall x \in E, x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.
- $A \setminus B \Leftrightarrow \forall x \in E, x \in A \wedge x \notin B$.
- $A \Delta B \Leftrightarrow \forall x \in E, (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$.

II. Algunas **propiedades de conjuntos**:

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- $(A^c)^c = A$.
- $A \setminus B = A \cap B^c$.
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$.
- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
- $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$.
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

P1. Uno de los elementos más importantes que debes aprender a lo largo de los cursos de introducción, es aprender a pensar y desarrollar una demostración. A continuación se muestra una posible solución de un ejercicio, pero que está incompleta. ¡Intenta completarla!

Sean A, B subconjuntos de un universo E. Probar que:

$$A \cap B^c = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

1) Por más que en este ejercicio se apliquen conocimientos de conjuntos, no hay que perder de vista que centralmente es una proposición lógica lo que hay que demostrar, específicamente una __________. Por lo tanto se va a tratar como una doble __________.
2) Primero, probemos que ______________. En este caso la hipótesis es que _____$= \emptyset$, y vamos a asumirla _____. Pues en una implicancia el único caso que es de interés es cuando la hipótesis es _____ (si no, la implicancia es trivialmente verdadera). Utilizando esta información el objetivo es lograr demostrar que _____.
3) En efecto, sea $x \in A$. Como por hipótesis __________, es directo que los conjuntos _____ y _____ no tienen elementos en común, y como precisamente se está tomando el _____ $\in A$, se puede asegurar que x no está en _____.
4) No estar en _____, significa que _____ está en el __________ de B^c, pero es conocido que _____ $=$ _____. Es decir que $x \in B$.
5) Se tomó un x cualquiera en A y se dedujo que x está en B, esta es la definición de que __________, y por lo tanto se concluye esta parte de la demostración.
6) Para la otra implicancia, la hipótesis es ______________, y lo que hay que demostrar es que ______________. En este caso se razonará por contradicción, por lo tanto se asumirá que ______________ es verdadera y que $A \cap B^c = \emptyset$, es falso.
7) Como estamos suponiendo que ______________ es distinto de _____, podemos tomar un $x \in A \cap B^c$. Por definición de la ______________, __________ y __________. Pero la hipótesis dice que si $x \in A$, entonces __________.
8) Con esto, se puede concluir que $x \in$ _____, y $x \in$ _____, es decir $x \in$ __________.
9) Pero por propiedad conocida __________ $=$ _____. Por lo tanto x no puede estar ahí. Es decir, tenemos una contradicción.
10) Con esto se concluye que esta otra __________ también es verdadera, y por lo tanto la __________ entera también lo es.

P2. Sean A, B y C conjuntos, pruebe que:

a) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \subseteq C$.

b) Concluya que $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.

P3. Sean A, B, C y D subconjuntos de un universo E. Probar que:

a) $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$ ¿Es cierta la otra implicancia?

b) $A \subseteq (B \cap C) \Leftrightarrow B^c \cup C^c \subseteq A$.

c) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

d) $A \Delta B = C \Rightarrow B = A \Delta C$.

P4. Sean $A_1 \subseteq B_1$, y $A_2 \subseteq B_2$. Demuestre que:

$$A_1 \cap A_2 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

¿Puede extender el razonamiento para el siguiente caso general? Sean $\{A_i\}_{i \in I}, \{B_i\}_{i \in I}$ dos familias de conjuntos tales que $(\forall i \in I, A_i \subseteq B_i)$. Demuestre que:

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i.$$

P5. Sean $A, B \subseteq E$ y $A \neq \emptyset$. Se define el conjunto $\mathcal{F} = \{X \subseteq E \mid X \cap A \neq \emptyset\}$, probar que:

a) $E \in \mathcal{F}$ y $A \in \mathcal{F}$.

b) $A \setminus B = \emptyset \Rightarrow B \in \mathcal{F}$.

c) $B \in \mathcal{F} \wedge C \subseteq U \Rightarrow (B \cup C) \in \mathcal{F}$.