

Introducción al Álgebra MA1101



Guía 4: Conjuntos y Funciones

Definiciones básicas:

- $\forall X \subseteq E, X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq E$.
- $\forall a \in A, \forall b \in B, (a, b) \in A \times B \iff a \in A \wedge b \in B$.
- $f \in B^A \iff f : A \rightarrow B$ es función.

En lo que sigue, $E \neq \emptyset$ denota un conjunto de referencia.

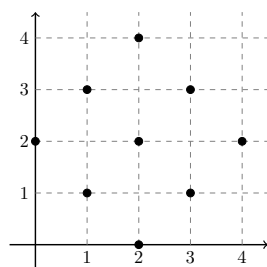
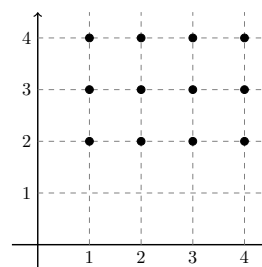
P1. Sean $A, B \subseteq E$ y $a, b, c, d \in E$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son Verdaderas y cuáles Falsas?

- | | |
|---|---|
| (i).- $a \subseteq \{a\}$. | (vi).- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. |
| (ii).- $\{a\} \subseteq \{a, b\}$. | (vii).- $a \in (a, b)$. |
| (iii).- $\emptyset \subseteq \emptyset$. | (viii).- $(a, b) \notin A \times B \iff a \notin A \wedge b \notin B$. |
| (iv).- $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$. | (ix).- $\{(a, b), (c, d)\} \subseteq A \times B \iff \{(a, d), (c, b)\} \subseteq A \times B$. |
| (v).- $\{a\} \subseteq \mathcal{P}(\{a, b\})$. | (x).- $(\{0, 1, 2\}, E, \{(0, a), (1, b), (0, c), (2, a)\})$ es función. |

P2. Sean $A, B \subseteq E$.

- Pruebe que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
- Muestre que si E tiene al menos dos elementos, entonces $\exists A, B \subseteq E, \mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
- Pruebe que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$.

P3. Sean Ω y Φ subconjuntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cuyos elementos están dados por los círculos negros de las Figuras (a) y (b). Si es posible exprese Ω y/o Φ en la forma $A \times B$ para algún $A, B \subseteq \mathbb{N}$, y en caso de no ser posible, argumente por qué no.

(a) Ω (b) Φ

P4. Sean $A, B \subseteq E$.

- Probar que $A^c \times B^c \subseteq (A \times B)^c$ donde $(A \times B)^c$ denota $(E \times E) \setminus (A \times B)$.
- Muestre con un contraejemplo¹ que no se cumple que $A^c \times B^c = (A \times B)^c$.
- Muestre que para cualquier conjunto $E \neq \emptyset$, existen $A, B \subseteq E$ tales que $A^c \times B^c \neq (A \times B)^c$. ¿Qué pasa si $E = \emptyset$?

P5. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(g) = g(1)$. Para $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ se define la función $h = f \cdot g$ por $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Para $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ se define la función $h = f + g$ por $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(x) + g(x)$.

- Encuentre funciones f y g para las que $F(f \cdot g) = 2$.
- Pruebe que $F(f + g) = F(f) + F(g)$.

¹Es decir, proponga conjuntos A, B, E con A y B subconjuntos de E .