Introducción al Álgebra MA1101

Guía de Trabajo Personal Semana 5: Funciones

P1. Para cada una de las afirmaciones siguientes, decida si es verdadera o falsa para A un conjunto no vacío cualquiera, justificando adecuadamente su respuesta. En caso de ser falsa, indique además bajo qué condiciones para A (si es que las hay), la afirmación se hace verdadera.

a) Una función $f : A \to A$ es inyectiva ssi $\forall x, y \in A, f(x) \neq f(y)$.

b) Sea $a_0 \in A$ fijo. Entonces la función constante $f : A \to A$ definida por $f(x) = a_0$ para cada $x \in A$, es inyectiva.

c) Sea $a_0 \in A$ fijo. Entonces la función constante $f : A \to A$ definida por $f(x) = a_0$ para cada $x \in A$, es epiyectiva.

d) Sea $f : A \to A$ una función, entonces f tiene función inversa ssi existe $g : A \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

e) La única función biyectiva $f : A \to A$ tal que $f = f^{-1}$ es $f = \mathrm{id}_A$.

f) Si $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_A$, entonces f es una biyección y $f^{-1} = f \circ f$.

g) Si $f, g : A \to A$ son dos biyecciones cualquiera, entonces $f \circ g = g \circ f$.

P2. a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = 7x - 5$. Demuestre que f es biyectiva.

b) Sea $\mathcal{F} = \{\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b\ \}$. Se define $\varphi : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mediante $\varphi(f) = (f(0), f(1))$ para cada $f \in \mathcal{F}$. Demuestre que φ es biyectiva.

P3. Sea A un conjunto no vacío. Se definen las funciones $\pi : A \times A \to A$ y $\delta : A \to A \times A$, mediante $\pi(a, b) = b$, para cada par $(a, b) \in A \times A$, y $\delta(a) = (a, a)$, para cada $a \in A$.

a) i) Muestre que $\pi \circ \delta = \mathrm{id}_A$.
   ii) ¿Bajo qué condiciones sobre el conjunto A, resulta que $\delta \circ \pi = \mathrm{id}_{A \times A}$? Justifique su respuesta.

b) i) Demuestre que π es epiyectiva.
   ii) ¿Bajo qué condiciones sobre el conjunto A, la función π resulta inyectiva? Justifique su respuesta.

c) i) Demuestre que δ es inyectiva.
   ii) ¿Bajo qué condiciones sobre el conjunto A, la función δ resulta epiyectiva? Justifique su respuesta.

P4. Sean A, B dos conjuntos fijos no vacíos cualquiera. Sea $F : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ definida por $F(X, Y) = X \setminus Y$, para cada $X \in \mathcal{P}(A)$ y cada $Y \in \mathcal{P}(B)$.

a) Demuestre que F es epiyectiva.

b) Demuestre que F no es inyectiva.

P5. Sean A, B y C tres conjuntos no vacíos. Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to A$ tales que:

- $h \circ g \circ f$ es inyectiva,
- $f \circ h \circ g$ es inyectiva y
- $g \circ f \circ h$ es epiyectiva.

Demuestre que f, g y h son biyectivas.