

Introducción al Álgebra MA1101 (2020-1)



Guía de Trabajo Personal Semana 8: Sumatorias

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determine cuáles de las siguientes expresiones tienen el mismo valor.

(a) $\sum_{k=0}^n 2^{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{2k+1}.$

(c) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k 2^k.$

(d) $\frac{2 \cdot 4^n + 1}{3}.$

(b) $4^n - \sum_{k=0}^{n-1} (2^{2k}).$

(e) $\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} 2^{k-1}.$

2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que:

(a) Si $n \geq 2$, entonces $\sum_{i=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{i^2} \right) = \ln \left(\frac{n+1}{2n} \right).$

(b) $\sum_{j=0}^n \frac{1}{\sqrt{3j+2} + \sqrt{3j+5}} = \frac{1}{3} (\sqrt{3n+5} - \sqrt{2}).$

(c) Si $n \geq 2$, entonces $\sum_{k=2}^n \frac{k}{(k-2)! + (k-1)! + k!} = 1 - \frac{1}{n!}.$

(d) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \left(\sin \left((k+1) \frac{\pi}{n} \right) - 2 \sin \left(k \frac{\pi}{n} \right) \right) = 0.$

(e) $\sum_{k=-1}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{k=3}^{n+2} a_{k-1}$ si y sólo si $a_0 + a_1 = a_{n+1}.$

(f) Sean $i, n \in \mathbb{N}$, $i \leq n$, y $a_i, \dots, a_{n+1}, b_i, \dots, b_{n+1} \in \mathbb{R}$. Pruebe que

$$\sum_{k=i}^n (a_{k+1} - a_k) b_k = a_{n+1} b_{n+1} - a_i b_i - \sum_{k=i}^n a_{k+1} (b_{k+1} - b_k).$$

3. Calcule en función de $n \in \mathbb{N}$ las siguientes sumatorias:

(a) $\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n q^j$ donde $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$.

(b) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i i.$

(c) $\sum_{i=0}^n 2^{i+1} \frac{i}{(i+1)(i+2)}.$

(d) $\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i i^2.$