Introducción al Álgebra MA1101

Guía 11: Homomorfismos y Grupos

P1. Sean $(A, *)$ y $(B, \triangle)$ dos estructuras algebraicas. Sea $f : (A, *) \to (B, \triangle)$ un homomorfismo.

i) Demuestre que $\triangle$ es una ley de composición interna en $f(A)$.

ii) Demuestre que si $(A, *)$ es un grupo, entonces $(f(A), \triangle)$ también lo es.

P2. Sea $m \in \mathbb{N}$, sea $f : (\mathbb{Z}_m, +_m) \to (\mathbb{Z}, +)$ un homomorfismo cualquiera. Demuestre que necesariamente f es la función constante igual a cero.

P3. i) Sea $(G, *)$ un grupo que verifica la siguiente propiedad: $\forall a, b \in G$, $(a * b)^2 = a^2 * b^2$. Demuestre que $(G, *)$ es un grupo abeliano.

ii) Sean

$$G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}\},$$

$$\overline{G} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists b \in \mathbb{R}, f(x) = x + b, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Pruebe que $(G, \circ)$ es un grupo y que $(\overline{G}, \circ)$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

P4. Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y $H = \{h : G \to G \mid h \text{ es homomorfismo}\}$, es decir, H es el conjunto de todos los endomorfismos de $(G, *)$. En H se define la ley $\triangle$ por

$$(h_1 \triangle h_2)(x) = h_1(x) * h_2(x) \quad \forall h_1, h_2 \in H, \forall x \in G.$$

Verifique que $\triangle$ es una ley de composición interna y que $(H, \triangle)$ es un grupo abeliano.

P5. En $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ se define la siguiente ley de composición interna,

$$(a, b) * (c, d) = (a \cdot c, b + a \cdot d).$$

Demuestre que $((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}, *)$ es un grupo, y que es isomorfo a $(G, \circ)$ de la parte ii) del **P3**. ¿Es $((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}, *)$ un grupo abeliano?