

Introducción al Álgebra MA1101



Guía 12: Subgrupos, Anillos, y Cuerpos

Resumen:

- Sea $(A, *)$ un grupo, y $\emptyset \neq H \subseteq A$. Diremos que $(H, *)$ es **subgrupo**, si $(H, *)$ es un grupo, o equivalentemente $\forall x, y \in H \ x * y^{-1} \in H$.

Sea $(A, +, \cdot)$ un conjunto con dos estructuras:

- Se dice **anillo** si $(A, +)$ es grupo abeliano, y además $\cdot$ es asociativa, distribuye con respecto

a $+$, y tiene neutro $1 \in A \setminus \{0\}$.

- Se dice **anillo conmutativo** si es un anillo, y $\cdot$ es conmutativo.
- Sean x, y ambos no nulos. Si $x \cdot y = 0$ se dice que x e y son **divisores del cero**.
Notar que en este caso $x \cdot a = x \cdot b \not\Rightarrow a = b$.
- Se dice **cuerpo** si es un anillo conmutativo y $\forall x \in A \setminus \{0\}$ es invertible para $\cdot$.

P1. Sea $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$, dada por $f(m) = 6m$.

- Demuestre que f es homomorfismo.
- Para $n \in \mathbb{N}$, demuestre que $n\mathbb{Z} = \{nz : z \in \mathbb{Z}\}$ es subgrupo de $\mathbb{Z}$.
- Demuestre que $f(5\mathbb{Z})$ es subgrupo de lo que corresponda.
- Demuestre que $f^{-1}(12\mathbb{Z})$ es subgrupo de lo que corresponda.

P2. Sean $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, y $G' = \{2^a 3^b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

- Demuestre que G' es subgrupo de $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ donde $\cdot$ es el producto usual en $\mathbb{R}$.
- Considere $+$ la suma por componentes en G , y observe que con ello $(G, +)$ es grupo. Demuestre que $(G, +)$ es isomorfo a $(G', \cdot)$.
- ¿Se mantiene el resultado anterior si se reemplaza 3 por 4 en la definición de G' ?

P3. Sean $(A, +_A, \cdot_A), (B, +_B, \cdot_B)$ dos anillos, y considere $(A \times B, +, \cdot)$, donde las operaciones consisten en:

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a +_A c, b +_B d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (a \cdot_A c, b \cdot_B d).\end{aligned}$$

- Demuestre que $(A \times B, +, \cdot)$ es un anillo.
- Demuestre que $A \times B$ tiene divisores del cero, incluso si A y B no tienen.
- Sea F un cuerpo. ¿Es $F \times F$ un cuerpo?

P4. Sea E un conjunto no vacío.

- Demuestre que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ es un anillo. Para cada operación especifique cuál es el neutro, y cuál es el inverso de un conjunto A .
- Utilizando lo demostrado en la **P3**, demuestre que para $\emptyset \neq A \subseteq E$, $\mathcal{P}(E)$ es isomorfo a $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A^c)$, con las operaciones utilizadas en el ítem anterior, componente a componente.

P5. Sea $(G, *)$ un grupo con neutro e . Para $g \in G$, se define $\langle\{g\}\rangle = \{kg : k \in \mathbb{Z}\}$, donde kg es el producto iterado, es decir:

$$kg = \begin{cases} e & \text{si } k = 0, \\ (k-1)g * g & \text{si } k \geq 1, \\ |k|(-g) & \text{si } k < 1. \end{cases}$$

- a) Sea G un grupo cualquiera, y $g \in G$. Demuestre que $(\langle\{g\}\rangle, *)$ es un subgrupo de G .
- b) Demuestre que si $f : (\langle\{g\}\rangle, *) \rightarrow (B, \Delta)$ es isomorfismo, entonces $\exists b \in B$ tal que $B = \langle\{b\}\rangle$.
- c) Encuentre $g \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{Z} = \langle\{g\}\rangle$, donde $*$ sería la suma usual de $\mathbb{Z}$.