Introducción al Álgebra MA1101

Guía de Trabajo Personal Semana 13: Números Complejos

P1. a) Para $n \in \mathbb{N}$, encuentre la parte real e imaginaria de

$$\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{3n} + \left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{3n}.$$

b) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1$ e $\mathrm{Im}(z) > 0$. Demuestre que:

$$\mathrm{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) > 0.$$

P2. Mostrar que si $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ son sumas de cuadrados de dos naturales, entonces su producto también lo será. Esto es, si $s_j = a_j^2 + b_j^2$, para $j = 1, 2$, con $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$, demuestre que existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $s_1 \cdot s_2 = m^2 + n^2$.

Indicación: Trabaje con los complejos $z_j = a_j + ib_j$, $j = 1, 2$.

P3. a) Demuestre que para todo $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq -1$ y $|z| = 1$, se tiene que

$$\frac{1+z}{1+\overline{z}} = z.$$

b) Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| = 1$ y $z^{2n} \neq -1$. Demuestre que:

$$\frac{z^n}{1+z^{2n}} \in \mathbb{R}.$$

P4. Sea $z \in \mathbb{C}$ un complejo cualquiera y sean $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = 0$.

a) Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|} \cdot (z_k - z) = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

b) Concluya que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - z|$.

P5. a) Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, y sea $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que el producto de las raíces n-ésimas de z es $(-1)^{n-1}z$.

b) Sea $\rho = e^{i \cdot \frac{2\pi}{5}} \in \mathbb{C}$. Demuestre que $(1-\rho) \cdot (1-\rho^2) \cdot (1-\rho^3) \cdot (1-\rho^4) = 5$.