

## Introducción al Álgebra MA1101



## Guía de Trabajo Personal Semana 14: Polinomios I

**P1)** a) Encuentre un polinomio  $P \in \mathbb{R}[x]$  de grado menor o igual a 2 tal que

$$P(0) = 0, \quad P(-1) = i, \quad P(2) = \sqrt{2}.$$

¿ Se puede tomar  $P$  de grado menor o igual a 1?

b) Misma pregunta que en a), pero ahora busque un polinomio mónico  $P$  de grado 3.

c) Encuentre  $a, b, c \in \mathbb{R}$  de modo que

$$3x^2 + 2x - 1 = (ax + b)(x + c), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**P2)** Sean  $P$  y  $Q$  polinomios en  $\mathbb{K}[x]$  de grados  $n$  y  $m$  respectivamente. Demuestre que las siguientes funciones son polinomios y determine su grado en función de  $n$  y  $m$ .

a)  $2P(x)$ .

b)  $P(x)^2Q(x) + Q(x)$ .

c)  $P \circ Q(x)$ .

d)  $Q \circ P(x)$ .

e)  $P(x+1) - P(x)$ .

**P3)** Para cada una de las siguientes ecuaciones, encuentre todos los polinomio  $P$  que la resuelven.

a)  $P(x^2) = (1 + x^2)P(x)$ .

b)  $P \circ P(x) = P(x)$ .

*Indicación: En cada ecuación, comience investigando el grado del polinomio  $P$ .*

**P4)** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  y considere el polinomio  $P(x) = x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2x + 1$ . ¿Para qué valores de  $a$  y  $b$  el polinomio  $P$  es un cuadrado perfecto?

*Nota: Aquí decimos que  $P$  es un cuadrado perfecto si existe  $Q \in \mathbb{R}[x]$  tal que  $P(x) = Q(x)^2, \forall x \in \mathbb{R}$ .*

*Indicación: comience preguntándose cuál debería ser el grado de  $Q$ .*

**P5)** Se define la secuencia de polinomios  $T_n \in \mathbb{R}[x]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  por la fórmula de recurrencia  $T_0 = 1$ ,  $T_1(x) = x$ ,  $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ , para  $n \geq 1$ .

a) Muestre que  $\text{gr}(T_n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

b) Muestre que  $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ .

c) Demuestre que  $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta), \forall n \in \mathbb{N}$ .

*Indicación: le puede ser útil la fórmula  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)$ .*

*Indicación: se le recomienda usar el principio de inducción en a), b) y c).*