

P1 a) Queremos ver que S es reflexiva, simétrica y transitiva

• Reflex Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow x \cdot x = x^2 > 0 \Rightarrow x S x \quad \square$$

• Sim Sean $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ t.q. $x S y$:

$$\Rightarrow x S y \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow yx > 0 \Rightarrow y S x \quad \square$$

• Trans Sean $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ t.q. $x S y \wedge y S z$:

$$x S y \wedge y S z \Rightarrow xy > 0 \wedge yz > 0 \Rightarrow xy^2z > 0 \Rightarrow xz > 0 \Rightarrow x S z \quad \square$$

$\cdot \frac{1}{y^2}$
↓

$\therefore S$ equivalencia

b) Debemos encontrar todas las clases de equivalencia:

- Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} +_g x > 0$

$$\Rightarrow [x]_g = \{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : xa > 0\} = \{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : a > 0\} = \mathbb{R}_+$$

- Sea $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} +_g y < 0$

$$\Rightarrow [y]_g = \{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : ya > 0\} = \{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : a < 0\} = \mathbb{R}_-$$

→ Con ambos casos, hemos cubierto todo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}) / g = \{[1]_g, [-1]_g\} \quad \square$$

^{a.s)}
P2) Reflex Sea $m \in \mathbb{N}$. Como $m = m \Rightarrow m R m$ $\square$

• Sim Sea $m, n \in \mathbb{N}$ t.q. $m R n$:

$$m R n \Rightarrow m = n \vee (2|m \wedge 2|n) \Rightarrow n = m \vee (2|m \wedge 2|n) \Rightarrow n R m \quad \square$$

• Trans Sea $m, n, k \in \mathbb{N}$ t.q. $m R n \wedge n R k$:

$$m R n \wedge n R k \Rightarrow [m = n \vee (2|m \wedge 2|n)] \wedge [n = k \vee (2|n \wedge 2|k)]$$

$$\Rightarrow (m = n \wedge n = k) \vee (2|m \wedge 2|n \wedge n = k) \vee (m = n \wedge 2|n \wedge 2|k) \vee (2|m \wedge 2|n \wedge 2|n \wedge 2|k)$$

$$\Rightarrow (m = k) \vee (2|m \wedge 2|k) \vee (2|m \wedge 2|k) \vee (2|m \wedge 2|n \wedge 2|k)$$

$$\Rightarrow (m = k) \vee (2|m \wedge 2|k) \Rightarrow m R k \quad \square$$

• R equivalencia

a.2) • Sea $n \in \mathbb{N}$ t.q. $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ (n es par)

$$\Rightarrow [n]_{\mathcal{R}} = \{m \in \mathbb{N} : n \mathcal{R} m\} = \{m \in \mathbb{N} : n = m \vee (2|n \wedge 2|m)\}$$

$$= \{m \in \mathbb{N} : n = m \vee \text{"m par"}\}$$

* Como n también es par, $m = n$ está incluido en "m par"

$$\Rightarrow [n]_{\mathcal{R}} = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ par}\} = \{m \in \mathbb{N} : m = 2k, k \in \mathbb{N}\} \quad \leftarrow \text{Conjunto de los pares}$$

• Sea $n \in \mathbb{N}$ t.q. $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ (n impar) $\rightarrow$ Falso pues n impar

$$\Rightarrow [n]_{\mathcal{R}} = \{m \in \mathbb{N} : n = m \vee (2|n \wedge 2|m)\} = \{m \in \mathbb{N} : n = m\} = \{n\}$$

b) Mostremos que Ω es reflexo, antisimétrica y transitiva

• Reflexo Sea $x \in A$. Claramente $f(x) \leq f(x) \Rightarrow x \Omega x$ $\square$

• Anti Sea $x, y \in A$ + $x \Omega y \wedge y \Omega x$:

$x \Omega y \wedge y \Omega x \Rightarrow f(x) \leq f(y) \wedge f(y) \leq f(x) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ $\square$

$a \leq b \quad \wedge \quad b \leq a \quad \Rightarrow \quad a = b$

f injectivo

• Trans Sea $x, y, z \in A$ + $x \Omega y \wedge y \Omega z$:

$x \Omega y \wedge y \Omega z \Rightarrow f(x) \leq f(y) \wedge f(y) \leq f(z) \Rightarrow f(x) \leq f(z) \Rightarrow x \Omega z$ $\square$

$a \leq b \quad \wedge \quad b \leq c \quad \Rightarrow \quad a \leq c$

• Ω de orden

P3 a) Reflex) como R es reflexiva $\Rightarrow \forall a, b \in A : a R a \wedge b R b$
 $\Rightarrow \forall (a, b) \in A \times A : (a, b) R^* (a, b)$ □

• Antisim) Sea $(a, b), (c, d) \in A \times A$ t.f. $(a, b) R^* (c, d) \wedge (c, d) R^* (a, b)$:
 $(a, b) R^* (c, d) \wedge (c, d) R^* (a, b) \Rightarrow a R c \wedge b R d \wedge c R a \wedge d R b \xrightarrow{R \text{ orden (anti)}} a = c \wedge b = d$
 $\Rightarrow (a, b) = (c, d)$ □

• Trans) Sea $(a, b), (c, d), (e, f) \in A \times A$ t.f. $(a, b) R^* (c, d) \wedge (c, d) R^* (e, f)$:
 $\Rightarrow a R c \wedge b R d \wedge c R e \wedge d R f \xrightarrow{R \text{ orden (trans)}} a R c \wedge b R f \Rightarrow (a, b) R^* (e, f)$ □

• R orden $\Rightarrow R^*$ orden

b) Como A tiene al menos dos elementos, entonces $\exists a, b \in A$ t.q. $a \neq b$

luego como R es orden total $\Rightarrow aRb \vee bRa$

SDG., supongamos $aRb \Leftrightarrow V$, $bRa \Leftrightarrow F$

luego R^* no es orden total, pues:

$$\bullet (a,b)R^*(b,a) \Leftrightarrow aRb \wedge bRa \Leftrightarrow F$$

$$\bullet (b,a)R^*(a,b) \Leftrightarrow bRa \wedge aRb \Leftrightarrow F$$

$$\therefore \bullet \exists (a,b), (b,a) \in A \times A \text{ -t.q. } \overline{(a,b)R^*(b,a)} \wedge \overline{(b,a)R^*(a,b)}$$

ie, R^* no es orden total $\square$

c) Ya mostramos en (a) que $R \text{ refleja} \Rightarrow R^* \text{ refleja}$
 $R \text{ trans} \Rightarrow R^* \text{ trans}$

• Sim Sea $(a,b), (c,d) \in A \times A$ t.f. $(a,b) R^* (c,d)$
 $\Rightarrow a R c \wedge b R d \stackrel{R \text{ sim}}{\Rightarrow} c R a \wedge d R b \Rightarrow (c,d) R^* (a,b) \quad \square$

• $\therefore R \text{ equiv.} \Rightarrow R^* \text{ equiv.}$

d) Sea $(a, b) \in A \times A$, identifiquemos los conjuntos:

- $[(a, b)]_{R^*} = \{(x, y) \in A \times A : (a, b) R (x, y)\} = \{(x, y) \in A \times A \mid a R x \wedge b R y\}$
- $[a]_R = \{x \in A : a R x\}$

1) Sea $(x, y) \in [(a, b)]_{R^*} \Rightarrow (x, y) \in A \times A, a R x \wedge b R y$

$$\Rightarrow x \in A, y \in A, a R x \wedge b R y$$

$$\Rightarrow x \in [a]_R \wedge y \in [b]_R \Rightarrow (x, y) \in [a]_R \times [b]_R \quad \square$$

2) Sea $(x, y) \in [a]_R \times [b]_R \Rightarrow x \in [a]_R \wedge y \in [b]_R$

$$\Rightarrow x \in A \wedge x R a \wedge y \in A \wedge y R b$$

$$\Rightarrow (x, y) \in A \times A, a R x \wedge b R y \Rightarrow (x, y) \in [(a, b)]_{R^*} \quad \square$$