

MA1101-1 Introducción al Álgebra**Profesor:** María Leonor Varas**Auxiliares:** Pablo Araya.

Sebastian Lopez

Fecha: 14 de Mayo de 2021**Auxiliar 7: Sumatorias****Resumen**

1. Definición:

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

2. Propiedades:

a) Suma de la secuencia Constante igual a 1:

$$\sum_{k=0}^n 1 = n + 1$$

b) Factorización de Constantes: Sea $c \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^n c a_k = c \sum_{k=0}^n a_k$$

c) Separación de una suma:

$$\sum_{k=0}^n a_k + b_k = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k$$

d) Traslación de índice: Sea $l \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=l}^{n+l} a_{k-l}$$

e) Separación de dos sumas: Sea $l \in \mathbb{N}$, $l \leq n$:

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^l a_k + \sum_{k=l+1}^n a_k$$

f) Telescópica:

$$\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}$$

g) Intercambio de sumas:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m a_{kj} = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{kj}$$

3. Sumas Conocidas:

$$a) \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$b) \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$c) \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$d) \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$e) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

Problemas**P1.** Calcular el valor de la siguiente sumatoria, con $b \in \mathbb{R}$, $b \neq \frac{1}{2}$:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b^i$$

P2. a) Calcule la sumatoria del cuadrado de los primeros n números pares, es decir:

$$\sum_{k=1, k \text{ par}}^{2n} k^2$$

b) Calcule la sumatoria del cuadrado de los primeros n números impares, es decir:

$$\sum_{k=1, k \text{ impar}}^{2n} k^2$$

c) Use las dos conclusiones anteriores para calcular la siguiente sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$$

P3. Demuestre que, para $p \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = pn \quad \forall n \geq 1$$