

Sem 14 52

P1. ¿Quién ganara?

Consideremos la sucesión $(s_n)_n$ siguiente

$$s_n = \frac{n^n}{n!e^n}$$

- (a) Determine si la sucesión es creciente o decreciente.
(b) Demuestre que $(s_n)_n$ es convergente.

a) Estudiemos $\frac{s_{n+1}}{s_n}$:

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)! e^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n! e^n} = \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{(n+1) \cdot n! \cdot e^n \cdot e} \cdot \frac{e^n \cdot n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{s_{n+1}}{s_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e} \right]$$

Definimos $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, sabemos que $(a_n)_n$ es una sucesión creciente, que converge a e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = e$$

luego, como e es el supremo de la sucesión, se cumple:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Volviendo, tenemos:

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore s_{n+1} \leq s_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (s_n)$ es decreciente



b) La sucesión $(s_n)_n$ se define como:

$$s_n = \frac{n^n}{n! e^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Luego es claro que $s_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (s_n)_n$ es acotada inferiormente

$\Rightarrow$ Por el Teo. de sucesiones monótonas, (s_n) converge 

P2. De puro sacar asíntotas

Calcule las asíntotas horizontales de

$$f(x) = (\sqrt{x^2 + 1} + 3x + 1)(e^{1/x} - 1).$$

$\therefore y = 4$ es

asíntota

horizontal

hacia $+\infty$

• Primero veamos la asíntota hacia $+\infty$:

$$\leadsto \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + 3x + 1)(e^{1/x} - 1) \quad / \quad \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 3x + 1}{x} \cdot \frac{e^{1/x} - 1}{1/x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} + 3 + \frac{1}{x} \right) \cdot \left(\frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 3 + \frac{1}{x} \right) \cdot \left(\frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \right) = \underline{4} \cdot \underline{1} = 4 //$$

• Vamos hacer $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + 3x + 1)(e^{1/x} - 1)$$

* Def $y = -x$

como $x \rightarrow -\infty$

$\Rightarrow y \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} (\sqrt{(-y)^2 + 1} - 3y + 1)(e^{-1/y} - 1)$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{y^2 + 1}}{-y} + 3 - \frac{1}{y} \right) \left(\frac{e^{-1/y} - 1}{-1/y} \right)$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\underline{-\sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}} + 3 - \underline{\frac{1}{y}} \right) \left(\underline{\frac{e^{-1/y} - 1}{-1/y}} \right)$$

$$= (\underline{-1} + 3 - \underline{0}) \cdot (\underline{1}) = 2$$

• la recta $z = 2$ es

asint. horizontal

hacer $-\infty$ 

P3. Hay que sacar los pasos prohibidos

Calcule el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{\ln(1+x)}$$

Notemos

$$2^x - 3^x = 3^x \left(\left(\frac{2}{3} \right)^x - 1 \right)$$

$$= 3^x \left(e^{x \ln(2/3)} - 1 \right)$$

$$= \frac{x \ln(2/3) 3^x \cdot (e^{x \ln(2/3)} - 1)}{x \ln(2/3)}$$

También;

$$\ln(1+x) = \frac{x \ln(1+x)}{x}$$

luego:

$$\leadsto \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{\ln(1+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(2/3) 3^x \cdot \frac{(e^{x \ln(2/3)} - 1)}{x \ln(2/3)}}{x \cdot \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)}$$

$$\Rightarrow \ln(2/3) \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = \ln(2/3) \quad \boxed{B}$$