

P1. Asintotas locas

Calcule todo tipo de asíntotas de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2 e^{\frac{2}{x}}}{x-1}$$

• Verticales: Observando la función, los posibles candidatos son las rectas $x=1$, $x=0$

• $x=1$) PDQ $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $\forall x$ tq $0 < x-1 < \delta \Rightarrow f(x) > M$

$$\leadsto f(x) > M$$

$$* \text{Notemos } x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$$

$$\Rightarrow x > 0 \Rightarrow \frac{2}{x} > 0 \Rightarrow e^{\frac{2}{x}} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 e^{\frac{2}{x}}}{x-1} > M$$

$$\circ \circ \quad x^2 e^{\frac{2}{x}} > 1 \Rightarrow \left[\frac{x^2 e^{\frac{2}{x}}}{M} > \frac{1}{M} \quad \forall x > 1 \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 e^{\frac{2}{x}}}{M} > x-1$$

$$\text{Eligiendo } \delta = \frac{1}{M} \circ 0 < x-1 < \frac{1}{M} < \frac{x^2 e^{\frac{2}{x}}}{M} \Rightarrow f(x) > M$$

Con lo anterior, hemos mostrado que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

$\therefore x=1$ es asíntota vertical

$x=0$ | Mostremos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, def $u = \frac{1}{x}$, como $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow u \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 e^{2/x}}{x-1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{u}\right)^2 e^{2u}}{\frac{1}{u} - 1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{2u}/u^2}{\frac{1}{u} - 1}$$

$\hookrightarrow$ Como el numerador diverge a $+\infty$, y el denominador tiende a -1

$$\Rightarrow \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{2u}/u^2}{\frac{1}{u} - 1} = -\infty$$

$\therefore x=0$ es asint. vertical //

Asintota Obliqua

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{2/x}}{x-1} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2/x}}_{=1} \quad \therefore m=1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{2/x}}{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{2/x} - x(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{2/x} - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 (e^{2/x} - 1)}{x-1} - \frac{2/x}{2/x} + \frac{x}{x-1}$$

$$= \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - x}}_{=2} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2/x} - 1}{2/x}}_{=1} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1}}_{=1} = 3 \quad \therefore n=3$$

- El desarrollo para los límites hacia $-\infty$ es análogo
- la recta $y = x + 3$ es asíntota oblicua hacia $+\infty$ y $-\infty$

Asint. horizontales

- Como la func. tiene asint. oblicuas $\Rightarrow$ No tiene horizontales

P2. Habemus límites

Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x+2) \ln \left(\frac{x-1}{x+3} \right)}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(\frac{x-1}{x+3} \right) + 2 \ln \left(\frac{x-1}{x+3} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(\frac{x-1}{x+3} \right)} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2 \ln \left(\frac{x-1}{x+3} \right)}$
 $= 1$

* Def $u = x+3$, luego $x \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty$

$\leadsto \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(\frac{x-1}{x+3} \right)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{(u-3) \ln \left(\frac{u-4}{u} \right)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{u \ln \left(1 - \frac{4}{u} \right)} \cdot \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{-3 \ln \left(\frac{u-4}{u} \right)}$
 $= 1$

* $\lim_{u \rightarrow +\infty} e^{u \ln \left(1 - \frac{4}{u} \right)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{u} \right)^u = e^{-4} //$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2} = e^{-4}$

P2) b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$ $\cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}}}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^{3/2}}}} = 1$ P2)

P3. Por eso los reales son mejores que los naturales

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $L \in \mathbb{R}$. Demuestre por definición que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$$

Donde $(f(n))_n$ denota la sucesión $(f(0), f(1), f(2), \dots)$

Luego, demuestre que la implicancia inversa no es cierta.

• Tenemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m > 0 \text{ t.q. } \forall x > m : |f(x) - L| < \varepsilon$$

$x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m > 0 \text{ t.q. } \forall n > m : |f(n) - L| < \varepsilon$$

$n \in \mathbb{N}$

• Definiendo $n_0 = \lfloor m \rfloor + 1$, tenemos:

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_0 : \underset{n \in \mathbb{N}}{|f(n) - L|} < \varepsilon$$

es decir, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = L$ 

• Veamos que la implicancia inversa no es cierta, tomemos $f(x) = \sin(\pi x)$

• Notemos que $\sin(\pi n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, luego esto nos dice que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$$

• Sin embargo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ no existe, pues tomando $(x_n) = \left(\frac{1}{2} + 2^n\right)$, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \neq 0 \quad \text{$$