

P1

P1. A las Lipschitz las queremos

Una función $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ se dice Lipschitz si existe $L > 0$ tal que para cada par de puntos reales x, y se cumple que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Estas son la funciones favoritas de Iván. Leo le cuenta que tienen algunas propiedades entretenidas:

- a) Sea f una función Lipschitz cualquiera, y sea (a_n) tal que $a_n \rightarrow a$. Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$
- b) Pruebe que la función exponencial no es Lipschitz.

Sem 12 SZ

P1) a) Queremos demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_0 : |f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$$

• Notemos que, como f es Lipschitz: $|f(a_n) - f(a)| \leq L |a_n - a| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• Además, como $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, entonces:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_1 : |a_n - a| < \varepsilon / L$$

Entonces, usando el instante n_1 , tenemos:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_1 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_0 : |f(a_n) - f(a)| \leq L |a_n - a| < L \cdot \varepsilon / L = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a) \quad \square$$

P1) b) Por contradicción, asumamos $\exp(\cdot)$ es Lipschitz, es decir:

$$\exists L > 0 \text{ t.g. } |e^x - e^y| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

• En particular, si tomamos elementos de la forma $x = n \in \mathbb{N}$, $y = 0$

entonces $|e^n - e^0| \leq L|n - 0|$

$$\Rightarrow e^n - 1 \leq Ln$$

$$\Rightarrow \frac{e^n - 1}{n} \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pero sabemos que $\frac{e^n - 1}{n}$ diverge a $+\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$

Luego $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.g. $\frac{e^{n_0} - 1}{n_0} > L$ ↗ Contra $\therefore \exp(\cdot)$ no es Lipschitz {3}

BZ

P2. Si llego arriba, en algún momento salí de abajo, cierto?

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in A$. Además se cumple que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L > 0$, muy linda y simple función dice Leo, pero a Iván se le ocurre un trabalenguas:

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > 0]$$

¿Es cierto el trabalenguas?

P2) No tenemos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.g. } \forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

• En particular, si elegimos $\varepsilon = L/2$, tenemos:

$$\exists \delta > 0 \text{ t.g. } \forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < L/2^*$$

* No tenemos $|f(x) - L| < L/2$

$$\Leftrightarrow L - L/2 < f(x) < L + L/2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{L/2 < f(x)} < 3L/2$$

como $L > 0 \Rightarrow L/2 > 0$, luego esta desigualdad implica que $f(x) > 0$

$$\therefore \exists \delta > 0 \text{ t.g. } \forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > 0$$

P3. ¿Quién sí, quién no?

Iván, Leo y Pato escogieron un límite cada uno:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x - x^2}$$

¿Cuánto valen? Si es que existen.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} - \frac{e^{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \frac{1}{x} - \frac{e^{x^2}}{x} \quad - *$

$* = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \frac{1}{x} - \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x} + \frac{1}{x} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \cancel{\frac{1}{x}} - \frac{e^{x^2} - 1}{x} - \cancel{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{x^2} - 1}{x} \cdot \frac{x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - \frac{x(e^{x^2} - 1)}{x^2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right)$$

$$= 1$$

$$= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$$

$$0$$

$$1$$

P3 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2} + \cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} - \cancel{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} *$$

* De aquí podemos notar que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2} \text{ no existe}$$

P3) c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x - x^2}$

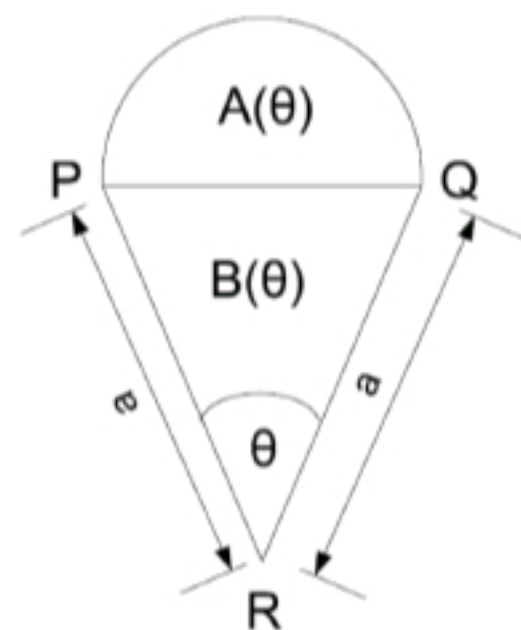
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} (e^{x-x^2} - 1)}{x - x^2}$$

$$= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x-x^2} - 1}{x - x^2}}_{=1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x - x^2} = 1$$

P4. ¿El área no se hace 0?

Iván dibujó un semicírculo de diámetro PQ que descansa sobre la base de un triángulo isósceles PQR que dibujó Leo, así forman la región de la figura. Teniendo en cuenta que $A(\theta)$ es el área del semicírculo y $B(\theta)$ es el área del triángulo isósceles ($\overline{PR} = \overline{QR} = a$), a Pato se le ocurrió calcular el siguiente límite:



$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{A(\theta)}{\theta \cdot B(\theta)}$$

¿Existe el límite de Pato? ¿Cuánto vale?

Definamos $r = \frac{\overline{PQ}}{2}$ el radio del semicírculo, por Teo. del cos:

$$(2r)^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad 4r^2 = 2a^2 (1 - \cos(\theta))$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = \frac{a^2 (1 - \cos(\theta))}{2}$$

$$\frac{\pi r}{2\theta h}$$

• La altura h del triángulo cumple:

$$h^2 = a^2 - r^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2 (1 - \cos \theta)}{2}$$

$$\Leftrightarrow h^2 = a^2 \left(1 - \frac{1 - \cos \theta}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow h^2 = a^2 \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)$$

• El área del Δ $B(\theta)$ cumple:

$$B(\theta) = \frac{(2r) \cdot h}{2} = r \cdot h = \sqrt{r^2 \cdot h^2} = \sqrt{\frac{a^2 (1 - \cos \theta)}{2} \cdot a^2 \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)}$$

$$\Leftrightarrow B(\theta) = \frac{a^2}{2} \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

• El área del semicírculo $A(\theta)$ cumple:

$$A(\theta) = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^2}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{\pi a^2}{4} (1 - \cos \theta) \quad \therefore A(\theta) = \frac{\pi a^2}{4} (1 - \cos \theta)$$

• Luego:

$$\frac{A(\theta)}{\theta B(\theta)} = \frac{\frac{\pi a^2 (1 - \cos \theta)}{4}}{\frac{\theta a^2 \sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{2}} = \frac{\pi (1 - \cos \theta)}{2 \theta \sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \quad \left| \cdot \frac{\theta}{\theta} \right.$$

$$\therefore \frac{A(\theta)}{\theta \cdot B(\theta)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \cdot \frac{\theta}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{A(\theta)}{\theta \cdot B(\theta)} = \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}}_{= 1/2} \cdot \underbrace{\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \theta}}_{= 1} = \pi/4 \quad \square$$

* Dada la naturaleza del problema, como θ es el ángulo de un triángulo, se tiene que $\theta \in (0, \pi)$. Luego θ no puede tender a 0 por el lado de los negativos //