

Sem 11 SZ

P1) Estudiar $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 f(1/n)$

• Notemos $f(1/n) = \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}}\right) = \ln\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\right)$

• Como $\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$, podemos usar la desig. del log:

$$1 - \frac{1}{\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\right)} \leq \ln\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\right) \leq \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n^2 + 1} \leq \ln\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\right) \leq \frac{2}{n^2 - 1} \quad \text{• } n^2$$

$$\Rightarrow \frac{2n^2}{n^2+1} \leq n^2 \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right) \leq \frac{2n^2}{n^2-1} \quad \Bigg/ \quad \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 f(1/n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2-1}$$

$$\Rightarrow 2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 f(1/n) \leq 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 f(1/n) = 2 \quad \text{Q.E.D.}$$

P2) a) Por inducción:

CB ($n=1$) $P.D.Q: S_0 > S_1 \Leftrightarrow S_0 - S_1 > 0$

• $S_0 - S_1 = e - (\ln(e) + 1) = e - 2 > 0 //$

II) Sea $n \in \mathbb{N}$ t.q. $S_n - S_{n+1} > 0$

PI) Queremos ver que $S_{n+1} - S_{n+2} > 0$

• $S_{n+1} - S_{n+2} = \ln(S_n) - 1 - (\ln(S_{n+1}) - 1)$
 $= \ln\left(\frac{S_n}{S_{n+1}}\right) > 0$ * por II $\frac{S_n}{S_{n+1}} > 1$

• $(S_n)_n$ es decreciente $\square$

P2 b) Por inducción:

CB ($n=0$) Veamos $S_0 \geq 1$: Como $S_0 = e \geq 1$, se tiene

HI) Sea $n \in \mathbb{N}$ tq $S_n \geq 1$

PI) Veamos que $S_{n+1} \geq 1$:

$$\bullet S_{n+1} = \ln(S_n) + 1, \text{ como } S_n \geq 1 \Rightarrow \ln(S_n) \geq 0$$

$$\text{Luego } S_{n+1} \geq 0 + 1 = 1$$

$$\therefore S_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$$

P2) c) Como (s_n) es decreciente y acotada inf. $\Rightarrow (s_n)$ es convergente //

$$\text{Luego } \exists L \in \mathbb{R} \text{ tq } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L$$

• Notemos además que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(s_{n-1}) + 1] = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(s_{n-1})) + 1 = \ln(L) + 1$$

$$\Rightarrow L = \ln(L) + 1$$

$$\Rightarrow L - 1 = \ln(L) \quad / \text{exp}(\cdot)$$

$$\Rightarrow e^{L-1} = L \quad \square$$

P3 a) PDU $f(x) > x \quad \forall x > 0$

• Notemos que si $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} > 1$

$$\text{luego } f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)} > \sqrt{x(x+2)} = \sqrt{x^2 + 2x}$$

• Si $x > 0 \Rightarrow 2x > 0$, luego $\sqrt{x^2 + 2x} > \sqrt{x^2} = x$

$$\therefore f(x) > x \quad \forall x > 0 //$$

• Ahora veamos que $S_n > 0 \quad \forall n$, por inducción:

CB (n=0) $S_0 = 1 > 0$ ✓

HI) Sea $n \in \mathbb{N}$ t.g. $S_n > 0$

PI) Veamos que $S_{n+1} > 0$:

$$\bullet S_{n+1} = f(S_n) \underset{\text{HI}}{>} S_n > 0 //$$

$$\therefore S_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego, para ver que (S_n) es estrictamente creciente:

$$S_{n+1} = f(S_n) > S_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \therefore (S_n) \text{ estrictamente creciente } \checkmark$$

7.3) b) Supongamos que (s_n) es acotada, luego por Teo:

- Como (s_n) estricta creciente y acotada $\Rightarrow (s_n)$ converge

Digamos $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L > 0$

• Por otro lado, tenemos

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_{n-1}) = f(L)$$

$\Rightarrow L = f(L)$ $\rightarrow$ Contradicción, pues $f(L) > L$ por parte (a)

• (s_n) no es acotada $\square$