

Sem 10 52

P1 Estudiamos la expresión interior:

$$* \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \cdot \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} = 1$$

$$= \frac{n+\sqrt{n} - (n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \cdot \frac{1/\sqrt{n}}{1/\sqrt{n}} = 1$$

$$= \frac{2}{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} //$$

Luego, volviendo al problema original:

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = 1 \quad \boxed{1}$$

P2) Estudiemos la expresión de la sucesión:

$$* \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \quad / \quad \frac{3^n}{3^n} = 1$$

luego tomamos límite:

$$= \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2^n} //$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2^n} = 0$$

Es

P3 a) CB (n=1) Como $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \Rightarrow f(n) \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 En particular, con $n=1$ tenemos $f(1) \geq 1$

HI $f(n) \geq n$ para algún $n \in \mathbb{N}$

PI PQR $f(n+1) \geq n+1$

* Sabemos que f es estricta creciente $\Rightarrow f(n+1) > f(n)$

Usando HI: $f(n+1) > f(n) \geq n \Rightarrow f(n+1) > n$

Como $f(n+1) \in \mathbb{N}$ y $f(n+1) > n \Rightarrow f(n+1) \geq n+1$ □

b) Por definición:

$$\text{PDQ} \mid \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_0 : \left| \frac{1}{f(n)} - 0 \right| \leq \varepsilon$$

$$* \text{ Como } f(n) \in \mathbb{N} \quad \forall n \Rightarrow \frac{1}{f(n)} \geq 0 \quad \forall n$$

$$\text{Luego: } \left| \frac{1}{f(n)} \right| = \frac{1}{f(n)}$$

$$* \text{ De (a), sabemos } f(n) \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{f(n)} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Luego tomando } n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1, \text{ tenemos que}$$

$$\frac{1}{f(n_0)} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon \quad \parallel$$

$$* \text{ Como además } \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{f(n)} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

