

Semana 9 52

P11 Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

• Notemos que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 1$

$$= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Luego tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0 \quad \boxed{B}$$

P2) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + (-1)^n}{3} \right)^n$

- Primero, notemos que para n par, i.e., $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{1 + (-1)^n}{3} \right)^n = \left(\frac{1 + (-1)^{2k}}{3} \right)^{2k} = \left(\frac{2}{3} \right)^{2k} = \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

- Si n es impar:

$$\left(\frac{1 + (-1)^n}{3} \right)^n = \left(\frac{1 + (-1)}{3} \right)^n = \left(\frac{0}{3} \right)^n = 0$$

• Notemos que en cualquiera de los dos casos, el término es no negativo, luego:

$$0 \leq \left(\frac{1 + (-1)^n}{3} \right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

• De la misma forma, podemos ver que:

$$\left(\frac{1 + (-1)^n}{3} \right)^n \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

pues en los n pares, ambas sucesiones velen lo mismo y en los n impares, se tiene que $0 \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n$ //

• Juntando ambas conclusiones:

$$0 \leq \left(\frac{1 + (-1)^n}{3} \right)^n \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + (-1)^n}{3} \right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + (-1)^n}{3} \right) \leq 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + (-1)^n}{3} \right) = 0 \quad \boxed{2}$$

P3) a) $\mathbb{Q} \cap [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

• Primero, recordemos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, i.e.:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y, \exists r \in \mathbb{Q} \text{ t.q. } x < r < y$$

• Notemos que $\mathbb{Q} \cap [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \subseteq \overbrace{[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]}^A$. Como A esta acotado superior e inferiormente (por $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$ respectivamente), entonces $\mathbb{Q} \cap [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ también.

∴ Por teo del sup, posee ínfimo y supremo

• Proponemos como candidato de ínfimo y supremo de $\underbrace{\mathbb{Q} \cap (-\sqrt{3}, \sqrt{3}]}_B$ a $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$ respectivamente:

• $\inf = -\sqrt{3}$ Por contradicción, supongamos que $-\sqrt{3}$ no es el ínfimo.

Entonces, $\exists i \in \mathbb{R}$ cota inferior de B t.q. $-\sqrt{3} < i$. Notemos $i \leq \sqrt{3}$, o no sería cota inferior.

Luego, por Teo. de densidad, $\exists q \in \mathbb{Q}$ t.q. $-\sqrt{3} < q < i$. Como $q \in \mathbb{Q}$ y $-\sqrt{3} < q < i \leq \sqrt{3} \Rightarrow q \in B$. Eso nos dice que hay un elemento en B que es menor que i , pero i era una cota inferior $\rightarrow \leftarrow$

$\therefore -\sqrt{3}$ es ínfimo de B

→ Además, esto nos dice que no tiene mínimo, esto pues el mínimo debe ser igual al ínfimo y pertenecer al conjunto, pero $-\sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow -\sqrt{3} \notin B$

• $\sqrt{3}$ es sup Análogo a lo anterior. Asumimos $s \in \mathbb{R}$, $s < \sqrt{3}$ cota superior de B .

Luego $\exists r \in \mathbb{Q}$ t.q. $s < r < \sqrt{3}$, lo que contradice que s sea cota superior

∴ $\sqrt{3}$ es el supremo de B

→ Además, por el mismo argumento, como $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{3} \notin B$.

Luego B no tiene máximo. □

b) Probemos algunos valores para entender el conjunto:

$$\underline{n=1} \quad 1 - \frac{(-1)^n}{n} = 1 - (-1) = 2$$

$$\underline{n=2} \quad 1 - \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{n=3} \quad 1 - \frac{(-1)^n}{n} = 1 - (-1)/3 = 1 + 1/3 = 4/3$$

$$\underline{n=4} \quad 1 - \frac{(-1)^n}{n} = 1 - 1/4 = 3/4$$

De aquí, podemos intuir que el conjunto, se puede ver como una sucesión alternante, que tiende a 1. Cuando n es impar, los valores son mayores a 1 y decrecientes. Cuando n es par, los valores son menores a 1 y crecientes.

• Por lo anterior, el conjunto está acotado $\Rightarrow$ Tiene ínf y sup.

Más aún, proponemos a 2 y $\frac{1}{2}$ como máximo y mínimo.

• max = 2 Ya vimos que 2 pertenece al cto, veamos que es el sup.

• Supongamos que 2 no es cota superior $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} +_g \quad 1 - \frac{(-1)^{n_0}}{n_0} > 2$

$$\Rightarrow n_0 - (-1)^{n_0} > 2n_0 \Rightarrow -(-1)^{n_0} > n_0, \text{ lo cual es imposible } \forall n_0 \in \mathbb{N}$$

• 2 es cota superior y pertenece al cto $\Rightarrow 2$ es máximo $\Rightarrow 2$ es supremo

• Con un desarrollo análogo, mostremos $\frac{1}{2}$ es mínimo $\Rightarrow \frac{1}{2}$ es ínfimo □

P4) a) • Como A es no vacío $\Rightarrow \exists x \in A \Rightarrow -x \in -A \Rightarrow \boxed{-A \neq \emptyset}$

• Como A es acotado inf $\Rightarrow \exists i \text{ t.q. } i \leq x \quad \forall x \in A$
 $\Rightarrow \exists i \text{ t.q. } -i \geq -x \quad \forall x \in A$

$\Rightarrow \exists c = -i \text{ t.q. } c \geq y \quad \forall y \in -A$ $\therefore c = -i$ cota superior de $-A$

Teo del

sup

• Como $-A \neq \emptyset$ y tiene cota superior $\Rightarrow$ Tiene supremo ✓

b) Si $s = \sup(-A)$, entonces:

1) $s \geq y \quad \forall y \in -A$, i.e., s es cota superior de $-A$

2) $s \leq c \quad \forall c$ cota sup. de $-A$

Notemos que de (1):

$$\bullet s \geq y \quad \forall y \in -A \Rightarrow -s \leq -y \quad \forall y \in -A \Rightarrow -s \leq x \quad \forall x \in A \quad \bullet \text{ luego } -s \text{ cota inf. de } A$$

De (2):

$$s \leq c \quad \forall c \text{ cota sup de } -A \Rightarrow -s \geq -c \quad \forall c \text{ cota sup de } -A \Rightarrow -s \geq i \quad \forall i \text{ cota inf de } A$$

*Aquí utilizamos lo mostrado antes pues $c = -i$, con c cota sup de $-A$
 i cota inf de A

$\therefore -s$ es la mayor de las cotas inf. de $-A$

$$\Rightarrow -s = \inf(A) \quad \square$$