MA1001 Introducción al Cálculo
Profesores: Patricio Felmer, Cristián Reyes.
Auxiliares: Leopoldo Cárdenas, Sebastián López, Gonzalo Salas, Iván Zúñiga.

Problemas Semana 7: Trigonometría

Sesión 2

07 de Mayo de 2021

Problemas

P1. Este o rema hacia el río Sena o rema hacia el Seno

Sea un triángulo ABC de lados a, b, c y ángulos α, β, γ, con $\alpha \neq \beta$. Si este triángulo cumple $(a^2+b^2)sin(\alpha-\beta) = (a^2 - b^2)sin(\alpha + \beta)$, demuestre que $\gamma = \pi/2$

P2. Siga siga

Demuestre que $\forall x \in [-1,1]$ $arccos(x) + arcsin(x) = \pi/2$ y concluya que el dominio de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt{arccos(\sqrt{x}) - arcsin(\sqrt{x})}$$

corresponde a $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Soluciones

P1. Partamos desarrollando la propiedad del triángulo:

$$
\begin{aligned}
&(a^2+b^2)sin(\alpha-\beta) = (a^2-b^2)sin(\alpha+\beta)\\
\iff &(a^2+b^2)(sin(\alpha)cos(\beta) - sin(\beta)cos(\alpha)) = (a^2-b^2)(sin(\alpha)cos(\beta) + sin(\beta)cos(\alpha))\\
\iff &sin(\alpha)cos(\beta)(a^2+b^2-a^2+b^2) = sin(\beta)cos(\alpha)(a^2-b^2+a^2+b^2)\\
\iff &2b^2 sin(\alpha)cos(\beta) = 2a^2 sin(\beta)cos(\alpha)\\
\iff &\frac{b^2}{a^2} = \frac{sin(\beta)cos(\alpha)}{sin(\alpha)cos(\beta)}
\end{aligned}
$$

De aquí, notemos que además por teorema del seno, se cumple:

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)}\\
\iff &\frac{sin(\beta)}{sin(\alpha)} = \frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

Reemplazando esta información en la ecuación anterior:

$$
\begin{aligned}
&\frac{sin^2(\beta)}{sin^2(\alpha)} = \frac{sin(\beta)cos(\alpha)}{sin(\alpha)cos(\beta)}\\
\iff &\frac{sin(\beta)}{sin(\alpha)} = \frac{cos(\alpha)}{cos(\beta)}\\
\iff &sin(\beta)cos(\beta) = sin(\alpha)cos(\alpha)\\
\iff &\frac{sin(2\beta)}{2} = \frac{sin(2\alpha)}{2}\\
\iff &sin(2\beta) = sin(2\alpha)
\end{aligned}
$$

Esta última ecuación, nos dice que tenemos 2 opciones:

- $2\alpha = 2\beta \implies \alpha = \beta$, lo cuál es imposible por enunciado.
- $2\alpha + 2\beta = \pi \implies \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

Como además, estamos en un triangulo, sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Utilizando la última información del segundo caso, concluimos inmediatamente que $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

P2. Sea $x \in [-1, 1]$, notemos:

$$\begin{aligned} x &= sen(arcsen(x)) \cdot 1 \\ &= sen(arcsen(x)) \cdot sen(\frac{\pi}{2}) + 0 \\ &= sen(arcsen(x))sen(\frac{\pi}{2}) + cos(\frac{\pi}{2}) \\ &= sen(arcsen(x))sen(\frac{\pi}{2}) + cos(\frac{\pi}{2})cos(arcsen(x)) \\ &= cos\left(\frac{\pi}{2} - arcsen(x)\right) \end{aligned}$$

Hemos concluido entonces que $\forall x : x = cos\left(\frac{\pi}{2} - arcsen(x)\right)$, aplicando arcocoseno a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} & x = cos\left(\frac{\pi}{2} - arcsen(x)\right) \quad \Big| arccos(\cdot) \\ \iff & arccos(x) = \frac{\pi}{2} - arcsen(x) \\ \iff & arccos(x) + arcsen(x) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Y así, hemos demostrado la propiedad que nos pedían.
Ahora, utilicemos esta información para determinar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{arccos(\sqrt{x}) - arcsin(\sqrt{x})}$.

- En primer lugar, notemos que dentro de f estamos evaluando $\sqrt{x}$, lo cual nos dice inmediatamente que $x \geq 0$ para que la raíz esté bien definida.
- Por otro lado, al ser f la raíz de una expresión, para que esté bien definida necesitamos que esa expresión sea positiva, es decir:

$$\begin{aligned} & arccos(\sqrt{x}) - arcsin(\sqrt{x}) \geq 0 \\ \iff & arccos(\sqrt{x}) \geq arcsin(\sqrt{x}) \\ \iff & arccos(\sqrt{x}) + arcsin(\sqrt{x}) \geq 2arcsin(\sqrt{x}) \\ \iff & \frac{\pi}{2} \geq 2arcsin(\sqrt{x}) \\ \iff & \frac{\pi}{4} \geq arcsin(\sqrt{x}) \quad \Big| sen(\cdot) \\ \iff & sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq \sqrt{x} \\ \iff & \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \sqrt{x} \\ \iff & \frac{1}{2} \geq x \end{aligned}$$

Y así, hemos mostrado que f está bien definido ssi $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.