MA1001 Introducción al Cálculo
Profesores: Patricio Felmer, Cristián Reyes.
Auxiliares: Leopoldo Cárdenas, Sebastián López, Gonzalo Salas, Iván Zúñiga.

Problemas Semana 6: Trigonometría

Sesión 2

30 de Abril de 2021

Problemas

P1. Funciones, pero trigonométricas

Considere la función

$$f(x) = \frac{1+\sin x}{1-\cos x}$$

Encuentre dominio, signos, ceros, paridad, periodicidad e inyectividad.

P2. Triangulito

Un triángulo ABC isóceles con $\bar{AB} = \bar{CB}$ varía de tal manera que mantiene su vértice A en el punto $(-a, 0)$ para algún $a > 0$, su vértice B se mueve sobre el eje OY y el lado $\bar{CB}$ es horizontal. Determine la ecuación del lugar geométrico que recorre el vértice C. Identifique cuál cónica es e indique, si corresponde, centro, focos, directrices y excentricidad.

P3. Una de tantas identidades

Demuestre la siguiente identidad:

$$\frac{1}{cot(\alpha)+cot^3(\alpha)}+\frac{1}{tan(\alpha)+tan^3(\alpha)}+sen(2\alpha)=sec(\alpha)csc(\alpha)$$

Soluciones

P1. Recordemos que la función a analizar es $f(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{1-\cos(x)}$

- **Dominio:** Notemos que por ser una función racional, podría indefinirse en aquellos puntos en que el denominador sea 0, es decir:

$$1-\cos(x)=0 \iff cos(x)=1 \iff x=2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}$$

Luego $Dom(f)=\{x\in\mathbb{R} : x\neq 2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

- **Signos:** Basta notar lo siguiente:

$$\begin{aligned} sin(x) &\geq -1 \quad \forall x \implies 1+sin(x)\geq 0 \quad \forall x \\ cos(x) &\leq 1 \quad \forall x \implies 1-cos(x)\geq 0 \quad \forall x \end{aligned}$$

Como ambos, numerador y denominador son siempre no negativos, entonces la función f es siempre no negativa, es decir, $f(x)\geq 0 \quad \forall x$.

- **Ceros:** Queremos encontrar aquellos x tal que $f(x)=0$, para eso, basta encontrar donde se anula el numerador:

$$1+sin(x)=0 \iff sin(x)=-1 \iff x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

- **Paridad:** Para estudiar la paridad, analicemos el valor de $f(-x)$:

$$f(-x)=\frac{1+sin(-x)}{1-cos(-x)}=\frac{1-sin(x)}{1-cos(x)}$$

Este valor no es igual ni a $f(x)$ ni a $-f(x)$, por lo tanto, la función no es ni par ni impar.

- **Periodicidad:** Ya que los únicos términos que dependen de x en la función f son el seno y el coseno, entonces la función f hereda la periodicidad de ellos, es decir, f tiene periodo 2π. En efecto:

$$f(x+2\pi)=\frac{1+sin(x+2\pi)}{1-cos(x+2\pi)}=\frac{1+sin(x)}{1-cos(x)}=f(x)$$

- **Inyectividad:** Como la función f es periódica, entonces no puede ser inyectiva.

P2. Nos interesa el lugar geométrico del vértice C, por lo tanto, supongamos las coordenadas de $C = (\alpha, \beta)$ como incógnitas, y tratemos de buscar una ecuación que relacione α y β, de manera de encontrar la cónica que recorren.

Como el lado CB es horizontal, entonces B tiene la misma segunda coordenada que C, y además, como B se mueve en el eje OY, entonces tiene primera coordenada igual a 0. Concluimos que $B = (0, \beta)$.

Como el triangulo es isósceles, entonces el largo de AB es igual al largo de CB. Como $A = (-a, 0)$ es conocido, podemos calcular este largo:

$$\begin{aligned} d(A,B) = d(B,C) &\iff (0-(-a))^2 + (\beta - 0)^2 = (\alpha - 0)^2 + (\beta - \beta)^2 \\ &\iff a^2 + \beta^2 = \alpha^2 \\ &\iff \alpha^2 - \beta^2 = a^2 \\ &\iff \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{a^2} = 1 \end{aligned}$$

De esta última ecuación, notamos que el lugar geométrico del vértice C es una hipérbola, con las siguientes características:

- excentricidad: $e = \dfrac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{2}$
- directrices: $x = \pm \dfrac{a}{e} = \pm \dfrac{a}{\sqrt{2}}$
- focos: $(\pm ae, 0) = (\pm a\sqrt{2}, 0)$

P3. Partamos desarrollando el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{cot(\alpha)+cot^3(\alpha)}+\frac{1}{tan(\alpha)+tan^3(\alpha)}+sen(2\alpha) &= \frac{1}{\frac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)}+\frac{cos^3(\alpha)}{sen^3(\alpha)}}+\frac{1}{\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}+\frac{sen^3(\alpha)}{cos^3(\alpha)}}+sen(2\alpha)\\
&= \frac{1}{\frac{cos(\alpha)sen^2(\alpha)+cos^3(\alpha)}{sen^3(\alpha)}}+\frac{1}{\frac{sen(\alpha)cos^2(\alpha)+sen^3(\alpha)}{cos^3(\alpha)}}+sen(2\alpha)\\
&= \frac{sen^3(\alpha)}{cos(\alpha)(sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha))}+\frac{cos^3(\alpha)}{sen(\alpha)(cos^2(\alpha)+sen^2(\alpha))}+sen(2\alpha)\\
&= \frac{sen^3(\alpha)}{cos(\alpha)}+\frac{cos^3(\alpha)}{sen(\alpha)}+sen(2\alpha)\\
&= \frac{sen^4(\alpha)+cos^4(\alpha)}{sen(\alpha)cos(\alpha)}+2sen(\alpha)cos(\alpha)\\
&= \frac{sen^4(\alpha)+2sen^2(\alpha)cos^2(\alpha)+cos^4(\alpha)}{sen(\alpha)cos(\alpha)}\\
&= \frac{(sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha))^2}{sen(\alpha)cos(\alpha)}\\
&= \frac{1}{sen(\alpha)cos(\alpha)}\\
&= sec(\alpha)csc(\alpha)
\end{aligned}$$

Y así, hemos demostrado la identidad pedida.