MA1001 Introducción al Cálculo
Profesores: Patricio Felmer, Cristián Reyes.
Auxiliares: Leopoldo Cárdenas, Sebastián López, Gonzalo Salas, Iván Zúñiga.

Problemas Semana 5: Funciones

Sesión 2

23 de Abril de 2021

Problemas

P1. Estudiando el crecimiento

Demuestre las siguientes propiedades, sabiendo que f, g son funciones crecientes en $[a, b]$:

- $(\forall x \in [a, b])$ Si $f, g > 0$, entonces la función (fg) es creciente.
- $(\forall x \in [a, b])$ $-f(x)$ es decreciente.
- Si f no cambia de signo, entonces $\frac{1}{f}$ es decreciente en $[a, b]$.

Respuesta

- Primero notemos que f y g son crecientes y positivas, es decir:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 : 0 < f(x_1) \leq f(x_2)$$
$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 : 0 < g(x_1) \leq g(x_2)$$

  Luego por propiedad, tenemos que:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 : f(x_1)g(x_1) \leq f(x_2)g(x_2)$$

  Lo que es equivalente a decir que (fg) es creciente.

- Sabemos que f es creciente, es decir:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$$
$$\iff \forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 : -f(x_1) \geq -f(x_2)$$

  Con esto último hemos dicho que $-f$ es decreciente.

- Partamos asumiendo que $f > 0$, luego:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 : 0 < f(x_1) \leq f(x_2)$$
$$\iff \forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 : \frac{1}{f(x_1)} \geq \frac{1}{f(x_2)} > 0$$

  Lo cuál nos dice que $1/f$ es decreciente. Ahora en el caso que $f < 0$:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2) < 0$$
$$\iff \forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 : 0 > \frac{1}{f(x_1)} \geq \frac{1}{f(x_2)}$$

  Concluimos también que f es decreciente.

P2. Estudiando la paridad

Demuestre las siguientes propiedades:

- Si una función es par, entonces no puede ser inyectiva.
- Si una función par f con $Dom(f) = \mathbb{R}$ es creciente en $[0, \infty)$, entonces es decreciente en $(-\infty, 0]$.
- Si f es par e impar $\forall x \in Dom(f) = \mathbb{R}$, entonces $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Respuesta:

- Por contradicción, supondremos que una función f es par e inyectiva.
  Como f es inyectiva, tenemos que $\forall x_1, x_2 \in Dom(f) : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
  Sin embargo, como f es par, sabemos que $\forall x \in Dom(f) : f(-x) = f(x)$. Luego, por inyectividad, concluimos que $-x = x$, lo cuál es una contradicción.
- Como f es creciente en $[0, \infty)$, entonces:

$$\forall x_1, x_2 \in [0, \infty), x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$$

  Nos interesa ver que f es decreciente en $(-\infty, 0]$, es decir:

$$\begin{aligned}
& \forall y_1, y_2 \in (-\infty, 0], y_1 < y_2 : f(y_1) \geq f(y_2) \\
& \iff \forall -x_1, -x_2 \in (-\infty, 0], -x_1 < -x_2 : f(-x_1) \geq f(-x_2) \\
\text{(Paridad)} \ & \iff \forall -x_1, -x_2 \in (-\infty, 0], -x_1 < -x_2 : f(x_1) \geq f(x_2) \\
& \iff \forall x_1, x_2 \in [0, \infty), x_1 > x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)
\end{aligned}$$

  Esto último es cierto pues sabemos que f es creciente.
- Por ser par, sabemos que f cumple:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)$$

  Por otro lado, al ser f impar cumple:

$$\forall x \in \mathbb{R} : -f(-x) = f(x)$$

  Juntando ambas cosas, podemos concluir que:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(-x)$$

  Como x es cualquier elemento de los reales, entonces $-x$ es también cualquier elemento de los reales, luego:

$$\begin{aligned}
& \forall y \in \mathbb{R} : f(y) = -f(y) \\
& \iff \forall y \in \mathbb{R} : 2f(y) = 0 \\
& \iff \forall y \in \mathbb{R} : f(y) = 0
\end{aligned}$$

P3. No hay poquitos, solo parte entera

Considere la función f definida como:

$$f(x) = \frac{1}{[x] + [-x]}$$

Donde $[x]$ denota la parte entera de x. Determine el dominio, recorrido y paridad de f. Además, bosqueje su gráfico.

Respuesta:

- Primero, notemos que si $x \in \mathbb{Z}$, entonces $[x] = x$. Además $-x \in \mathbb{Z}$ y $[-x] = -x$. Luego tenemos que $[x] + [-x] = 0$
  Por otro lado, si $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, entonces $[x] + [-x] = -1$.
  Luego, podemos concluir que la función solo se define en los enteros, entonces $Dom(f) = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.
- Como ya mencionamos, para todo x en el dominio, se tiene que $[x] + [-x] = -1$, entonces tenemos que $f(x) = -1$, $\forall x \in Dom(f)$. Por lo tanto, $Rec(f) = -1$.
- Notemos que:
  $$f(-x) = \frac{1}{[-x] + [x]} = \frac{1}{[x] + [-x]} = f(x)$$
  Con esto, concluimos que f es par.
- Para el gráfico, basta notar que f es una función constante igual a -1 en su dominio, el cuál son todos los reales menos los enteros. Por lo tanto, es una función constante a trozos.