Autor: Juan Pablo Sepúlveda

Ideario 8

Acotamiento en $\mathbb{R}$

Cosas generales

En esta octava semana, comenzaremos el estudio de los acotamientos de subconjuntos de los reales ($\mathbb{R}$) e introduciremos el último axioma que nos faltaba para poder caracterizar completamente a este conjunto $\mathbb{R}$**: el axioma del supremo.**

La materia

Se comienza definiendo las **cotas superiores e inferiores** de un subconjunto de $\mathbb{R}$, y con ello, se definen de manera natural los conjuntos **superiormente acotados, inferiormente acotados,** y los **conjuntos acotados,** que no son más que conjuntos que son tanto superiormente acotados como inferiormente acotados.

Luego, muy relacionado con lo anterior se introducen los conceptos de **mínimo y máximo de un conjunto,** que son cotas (inferior y superior, respectivamente) que están en el conjunto. Es importante notar que estas **no siempre existen** (por ejemplo, considera el intervalo (0,1), es claro que está acotado, pero ¿Tiene mínimo y máximo?¿Cómo se podría justificar esto?).

Luego, se definen el **supremo** y el **ínfimo** de un conjunto, que son, respectivamente, **la menor cota superior** del conjunto, y **la mayor cota inferior** del conjunto. (¿Qué significa esto? Si existe máximo ¿Es igual que el supremo?)

Con todo esto, se enuncian propiedades relacionadas a estos conceptos. Y luego se introduce el **axioma del supremo**, que indica que todo conjunto no vacío y acotado superiormente tiene un supremo, que es un número real. (De esto, se puede deducir fácilmente algo similar para el ínfimo. ¿Cómo sería el enunciado de este resultado?¿Cómo se demuestra?).

Finalmente, se ilustran algunas aplicaciones de este axioma del supremo, como lo son definir funciones (como la parte entera o las raíces enésimas. ¿Conoces alguna otra?), o deducir propiedades.

Comentarios de cierre y puntos clave

Esta semana se le da un cierto cierre a esta “Construcción del conjunto $\mathbb{R}$” que se comienza en la semana 1 con los axiomas de cuerpo, y se deja en pausa en la semana 3. Esto pues, como se comentó en el ideario 2, los axiomas de cuerpo y los axiomas de orden no son suficientes para definir a $\mathbb{R}$, pues por ejemplo, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales, también cumple estos axiomas. Sin embargo, $\mathbb{Q}$ no cumple el axioma del supremo (¿Sabrías decir por qué?), con lo que logramos diferenciar a $\mathbb{R}$ del resto de los conjuntos.

Es importante hacer énfasis en que las aplicaciones prácticas de este axioma en conjunto con los otros 7 es tremendamente amplia, pues de hecho, es gracias a esto que se permiten sentar las bases de lo que es realmente el cálculo y sus componentes, como lo son los límites, las sucesiones, etc.

Es por esto que se ha sido tan enfáticos hasta el momento con la creación matemática formal de estas bases, pues así se puede, de ahora en adelante, comenzar a estudiar el cálculo no sólo de manera intuitiva, sino que teniendo un sustento formal y un respaldo de que todo lo que haremos a continuación es cierto y está bien fundamentado.