Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN700-1 Matemáticas para Economistas
22 de Abril de 2021

Clase Auxiliar #5

Profesores : Leonel Huerta, Piero Zanocco
Auxiliar: Matías Altamirano

P1. **(a)** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = x^2 + \cos(x) + y^2 - y$

i) Encuentre y estudie la naturaleza de los puntos críticos de f.

ii) Demuestra que f alcanza su mínimo.

(b) Resuelva el problema de optimización

$$\begin{cases} \text{mín} & g(x, y) = 6 - x^2 + y^2 \\ \text{s.a.} & (x, y) \in \bar{B}(0, 8) \end{cases}$$

P2. Considere las funciones $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(u) = (u - 1)^2(u + 1); \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz$$

Note que $0 = g(0, 0, 0) \leq g(x, , y, z) \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

(a) Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F = f \circ g$$

Calcule $\nabla F(x, y, z)$ y muestre que el conjunto de puntos donde se anula es:

$$N = \{x \in \mathbb{R}^3 \, : \, g(x) = 1\} \cup \{0\}$$

(b) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}^3$ se cumple:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = f''(g(x)) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) + f'(g(x)) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

(c) Demuestre que 0 es un máximo local de F.

(d) Demuestre que si a es un punto que verifica $g(a) = 1$, entonces es mínimo local de F.

P3. Hallar y clasificar los puntos críticos de:

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}(3x^2 + 5y^2)$$

P4. Un agrónomo expone que los factores más importantes para las plantas de su invernadero son la cantidad de horas de luz que reciben (x_1) y la cantidad de fertilizante utilizado (x_2). La cantidad de biomasa producida es proporcional al producto $x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, siendo α, β constantes positivas. Los costos por hora de luz y por unidad de fertilizante son, respectivamente, p_1, p_2. y el presupuesto disponible es w. Para ayudar al agrónomo a decidir cuántas horas de luz y qué cantidad de fertilizante debe utilizar para maximizar la producción de biomasa se propone el siguiente esquema:

(a) Escriba un problema de optimización que modele el desafío del agrónomo, es decir, identifique la función objetivo $f(x_1, x_2)$ y sus restricciones.

(b) Plantee un nuevo problema con las mismas restricciones, pero con la función objetivo $\ln(f(x_1, x_2))$ y justifique que la solución de este problema es también la del problema original.

(c) Argumente por qué basta considerar solo el caso en que el agrónomo invierte todo el presupuesto y resuelva el problema definido en **(b)**.