

**Clase Auxiliar #3**  
**Profesores :** Leonel Huerta, Piero Zanocco  
**Auxiliar:** Matías Altamirano

**P1.** Se define  $\mathbf{L}^\infty([0, 1])$  como el espacio de las funciones acotadas de  $[0,1]$  a valores en  $\mathbb{R}$ . Pruebe que

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$$

es norma en  $\mathbf{L}^\infty([0, 1])$

**P2.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  dos espacios métricos, y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (a)  $f$  es continua.
- (b) Para todo abierto  $A \subset Y$ , el conjunto  $f^{-1}(A)$  es un abierto en  $X$ .
- (c) Para todo cerrado  $F \subset Y$ , el conjunto  $f^{-1}(F)$  es un cerrado en  $X$ .

**P3.** Sea  $f : X \rightarrow Y$ , con  $X, Y$  espacios normados Muestre las siguientes proposiciones:

- (a)  $f$  continua  $\not\Rightarrow f(U)$  abierto,  $U \subset X$  abierto
- (b)  $f$  continua  $\not\Rightarrow f(G)$  cerrado,  $G \subset X$  cerrado