Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN700-1 Matemáticas para Economistas
22 de Marzo de 2021

# Pauta Clase Auxiliar #2

**Profesores :** Leonel Huerta, Piero Zanocco
**Auxiliar:** Matías Altamirano

**P1.** Sean $S_1$ y $S_2$ dos conjuntos convexos, y $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos la suma y ponderación de conjuntos como sigue:

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \{x_1 + x_2 : x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\} \\ \alpha S_1 &= \{\alpha x_1 : x_1 \in S_1\} \end{aligned}$$

Demuestre que tanto $S_1 + S_2$ como $\alpha S_1$ son conjuntos convexos.
***Solución:***
Veamos primero que $S_1 + S_2$ es un conjunto convexo, para ello tomemos $x, y \in S_1 + S_2$ y $\lambda \in (0,1)$, queremos probar que $\lambda x + (1-\lambda)y \in S_1 + S_2$, notamos que esto es equivalente a demostrar que $\exists s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tal que $\lambda x + (1-\lambda)y = s_1 + s_2$. Primero notamos que tanto $x, y \in S_1 + S_2$, luego $\exists x_1, y_1 \in S_1$ y $x_2, y_2 \in S_2$ tal que $x = x_1 + x_2$ e $y = y_1 + y_2$, con esto podemos notar que:

$$\begin{aligned} \lambda x + (1-\lambda)y &= \lambda(x_1 + x_2) + (1-\lambda)(y_1 + y_2) \\ &= [\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1] + [\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1] \end{aligned}$$

Ahora como $S_1$ es convexo, entonces $\lambda(x_1)+(1-\lambda)y_1 \in S_1$ y también $S_2$ es convexo, entonces $\lambda(x_2)+(1-\lambda)y_2 \in S_2$, luego si consideramos $s_1 = \lambda(x_1) + (1-\lambda)y_1$ y $s_2 = \lambda(x_2) + (1-\lambda)y_2$ tenemos que $\exists s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tal que $\lambda x + (1-\lambda)y = s_1 + s_2$ entonces $\lambda x + (1-\lambda)y \in S_1 + S_2$ y por lo tanto $S_1 + S_2$ es un conjunto convexo.

Ahora debemos mostrar que $\alpha S_1$, para ello tomemos $x, y \in \alpha S_1$ y $\lambda \in (0,1)$, queremos probar que $\lambda x + (1-\lambda)y \in \alpha S_1$, notamos que esto es equivalente a demostrar que $\exists s_1 \in S_1$ tal que $\lambda x + (1-\lambda)y = \alpha s_1$. Para ello notamos que tanto $x, y \in \alpha S_1$, luego $\exists x_1, y_1 \in S_1$ tal que $x = \alpha x_1$ y $y = \alpha y_1$ , con esto tenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda x + (1-\lambda)y &= \lambda \alpha x_1 + (1-\lambda)\alpha y_1 \\ &= \alpha(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1) \end{aligned}$$

Luego como $S_1$ es convexo tenemos que $\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \in S_1$ luego si consideramos $s_1 = \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1$, tenemos que $\exists s_1 \in S_1$ tal que $\lambda x + (1-\lambda)y = \alpha s_1$ entonces $\lambda x + (1-\lambda)y \in \alpha S_1$ y por lo tanto $\alpha S_1$ es un conjunto convexo.

**P2.** Muestre que la bola abierta $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}$ centrada en $x \in \mathbb{R}^n$ y de radio $r \in \mathbb{R}$ es un conjunto convexo para cualquier norma en $\mathbb{R}^n$.
***Solución:***
Veamos que la bola abierta es un conjunto convexo, para ello consideremos $y_1, y_2 \in B(x,r)$, queremos probar que $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in B(x,r)$ esto es equivalente a mostrar que $\|x - [\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2]\| < r$. Primero notemos que $x = x + \lambda x - \lambda x = \lambda x + (1-\lambda)x$, con esto podemos trabajar la expresión:

$$\begin{aligned} \|x - [\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2]\| &= \|x = \lambda x + (1-\lambda)x - [\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2]\| \\ &= \|\lambda(x - y_1) + (1-\lambda)(x - y_2)\| \\ &\leq \|\lambda(x - y_1)\| + \|(1-\lambda)(x - y_2)\| \qquad \textbf{(desigualdad triangular)} \\ &= \lambda\|(x - y_1)\| + (1-\lambda)\|(x - y_2)\| \qquad \textbf{(propiedad de norma)} \\ &< \lambda r + (1-\lambda)r \qquad (y_1, y_2 \in B(x,r)) \\ &= r \end{aligned}$$

Con esto mostramos que $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in B(x,r)$ y luego $B(x,r)$ es un conjunto convexo.

**P3.** Sea $C$ el conjunto definido por:

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{x}, x \in \{1,2,3,4,5\}\right\}$$

Encuentre el interior, adherencia y frontera de este conjunto. Diga además si este conjunto es abierto, cerrado.
***Solución:***

- $\mathring{C}$ = Interior($C$). Se debe especificar la expresión del conjunto (es decir, cuales son los puntos interiores) y los radios para los cuales esos puntos pertenecen al interior del conjunto.Luego:

$$\mathring{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$$

Sea $\vec{x} = (x,y) \in \mathring{C}$,luego basta tomar un radio:

$$r = min\{r_1, r_2\}$$

donde

$$r_1 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x^2+y^2}}{2} \qquad r_2 = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - 1}{2}$$

Veamos que este radio es el que funciona, para ello notamos que $\forall \vec{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in B(\vec{x}, r)$,por desigualdad triangular tenemos que:

$$\|\vec{z}\| \leq \|\vec{z} - \vec{x}\| + \|\vec{x}\| < r + \|\vec{x}\|$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\|\vec{x}\| \leq \|\vec{z} - \vec{x}\| + \|\vec{z}\| \iff \|\vec{z}\| \geq \|\vec{x}\| \|\vec{z} - \vec{x}\| > \|\vec{x}\| - r$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\|\vec{x}\| - r < \|\vec{z}\| < \|\vec{x}\| + r$$

Luego tenemos que:

$$\|\vec{x}\| - r_2 \leq \|\vec{x}\| - r < \|\vec{z}\| < \|\vec{x}\| + r \leq \|\vec{x}\| + r_1$$

Por lo tanto

$$\|\vec{x}\| - r_2 < \|\vec{z}\| < \|\vec{x}\| + r_1 \iff \|\vec{x}\| - 2r_2 < \|\vec{z}\| < \|\vec{x}\| + 2r_1$$

Ahora reemplazando $r_1$ y $r_2$:

$$1 < \|\vec{z}\| < \sqrt{2} \iff 1 < \bar{x}^2 + \bar{y}^2 < 2$$

Por lo que $\vec{z} \in \mathring{C}$

- $\bar{C}$= Adherencia($C$). Se debe especificar solo la expresión del conjunto (es decir,los puntos que están en la adherencia). Dicho eso haciendo el análisis respectivo de vecindades se llega a que:

$$\bar{C} = C$$

Es decir el conjunto $C$ es igual a su adherencia. Por lo tanto $C$ es un conjunto cerrado.

- $Fr(C)$=Frontera($C$). Recordamos que:

$$Fr(C) = \bar{C} \setminus \mathring{C}$$

Luego, tenemos que:

$$Fr(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{x}, x \in \{1,2,3,4,5\}\right\}$$

**P4.** Sean $A, B$ subconjuntos de $\mathbb{R}^d$. Demuestre las siguientes propiedades:

**(a)** $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$
***Solución:***
Sea $x \in \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$, luego tenemos dos opciones, $x \in \text{Int}(A)$ o $x \in \text{Int}(B)$. Sin pérdida de generalidad consideramos $x \in \text{Int}(A)$ (Otro caso es análogo). Ya que $x \in \text{Int}(A) \implies \exists r > 0 : B(x,r) \in A$. Ya que tenemos que $\text{Int}(A) \subseteq A \subseteq A \cup B \implies x \in A \cup B$ y $B(x,r) \in A \cup B$, la cual es la definición de que $x \in \text{Int}(A \cup B)$ y por lo tanto $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$

**(b)** $\mathrm{Adh}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(B)$

***Solución:***

Vemos que ya que la adherencia de cualquier conjunto es un conjunto cerrado entonces $\mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(B)$ es cerrado porque es intersección de dos cerrados. Por otro lado tenemos que $A \subseteq \mathrm{Adh}(A)$ y $B \subseteq \mathrm{Adh}(B)$ luego tenemos que $A \cap B \subseteq \mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(B)$ por lo tanto tenemos que $\mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(B)$ es un cerrado que contiene a $A \cap B$ y como $\mathrm{Adh}(A \cap B)$ es la intersección de todos los cerrados que contienen a $A \cap B$ tenemos que $\mathrm{Adh}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(B)$

**(c)** $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$

***Solución:***

Probaremos la igualdad a través de doble inclusión:

($\subseteq$) Sea $x \in \mathrm{Int}(A \cap B)$, luego existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq A \cap B$. Pero como $\mathrm{Int}(A \cap B) \subseteq A \cap B \subseteq A$ y $\mathrm{Int}(A \cap B) \subseteq A \cap B \subseteq B \implies x \in A$ y $B(x,r) \subseteq A$, por lo tanto $x \in \mathrm{Int}(A)$ y por otro $x \in B$ y $B(x,r) \subseteq B$, por lo tanto $x \in \mathrm{Int}(B)$ con lo que se concluye que $x \in \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$

($\supseteq$) Sea $x \in \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$. Luego $x \in \mathrm{Int}(A)$ y $x \in \mathrm{Int}(B)$, entonces por definición del interior existen $r_A > 0$ y $r_B > 0$ tal que $B(x,r_A) \subseteq A$ y $B(x,r_B) \subseteq B$. Por lo tanto, si consideramos $r = \min\{r_A, r_B\}$ entonces $B(x,r) \subseteq A$ y $B(x,r) \subseteq B \implies B(x,r) \subseteq A \cap B$, como $x \in A \cap B$ y por lo tanto $x \in \mathrm{Int}(A \cap B)$

**(d)** $\mathrm{Adh}(A \cup B) = \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)$

***Solución:***

Nuevamente veamos por doble inclusión

($\subseteq$) Notemos que $A \subseteq \mathrm{Adh}(A)$ y $B \subseteq \mathrm{Adh}(B)$ lo que implica que $A \cup B \subseteq \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)$. Veamos primero que dado $H, K \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $H \subseteq K$ entonces $\mathrm{Adh}(H) \subseteq \mathrm{Adh}(K)$. En efecto, notamos que $H \subseteq K \subseteq \mathrm{Adh}(K)$, luego $\mathrm{Adh}(K)$ es un cerrado que contiene a H, como $\mathrm{Adh}(H)$ es la intersección de todos los cerrados que contienen a $H$ obtenemos que $\mathrm{Adh}(H) \subseteq \mathrm{Adh}(K)$. Con esta propiedad tenemos que como $A \cup B \subseteq \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)$ se obtiene $\mathrm{Adh}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Adh}(\mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B))$, pero como $\mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)$ es cerrado, por ser unión finita de cerrados, tenemos que $\mathrm{Adh}(\mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)) = \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)$ y por lo tanto $\mathrm{Adh}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)$

($\supseteq$) Ya que $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, por la propiedad que mostramos anteriormente tenemos que $\mathrm{Adh}(A) \subseteq \mathrm{Adh}(A \cup B)$ y $\mathrm{Adh}(B) \subseteq \mathrm{Adh}(A \cup B)$, luego tenemos que $\mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B) \subseteq \mathrm{Adh}(A \cup B)$

**(e)** $\mathrm{Int}(A) = \phi$, si $A$ es numerable.

***Solución:***

Demostremos por contradicción, es decir supongamos que existe $A \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $A$ es numerable pero $\mathrm{Int}(A) \neq \phi$, es decir existe $x \in A$ y $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq A$. Luego por definición $B(x,r)$ es no numerable, lo cual es una contradicción.