

Sea $M \in M_{n \times n}$ valores y vectores propios:

$$\rightarrow Mv = v\lambda \Leftrightarrow Mv - v\lambda = 0 \Leftrightarrow (M - I\lambda)v = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
vector $\longleftrightarrow$ valor propio
propio

$\downarrow$
identidad $n \times n$

$$\rightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; \quad \underline{\lambda} \text{ valor propio}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a\underline{v_1} + b\underline{v_2} \\ c\underline{v_1} + d\underline{v_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\lambda v_1} \\ \underline{\lambda v_2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow p(\lambda) = \det(M - I\lambda)$$

λ es valor propio de $M \Leftrightarrow \lambda$ es un cero de $p(\lambda)$

(c) Sea la siguiente matriz, para cierto $b \in \mathbb{R}$

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Muestre que $\lambda = 1$ es valor propio de B sin importar el valor de b .

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (b-\lambda) \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (b-\lambda) [(-1-\lambda)(2-\lambda) + 2]$$

$$= (b-\lambda) (-2 - \lambda + \lambda^2 + 2)$$

$$p(\lambda) = (b-\lambda)(\lambda-1)\lambda = 0$$

$\Rightarrow$ valores propios de B serán
 $\{b, 0, 1\}$.

• Consideramos $b = 2$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

vector propio asociado al valor propio 0:

$$Bv = v\lambda = v \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) 2v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0$$

$$(2) -2v_1 - v_2 + 2v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = 2v_3 \quad (*)$$

$$(3) -v_1 - v_2 + 2v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = 2v_3$$

$$\left. \begin{matrix} v_1 = 0 \\ v_2 = 2v_3 \end{matrix} \right\} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v_3 \\ v_3 \end{pmatrix}; \quad v_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v = \pi \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \pi \in \mathbb{R}$$

vector propio asociado a 0 es $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

* M es ^{semi} definida positiva ssi:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: v^T M v \geq 0$$

* M es ^{semi} definida negativa ssi

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad v^T M v \leq 0$$

- prop: M es ^{negativo} definida positiva ssi todos los valores propios de M son ^{negativos} positivos.

(b) Demuestre, usando la definición de límite de funciones, que $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x+1} = 3$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0. \forall x \in A: |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

P.D.Q: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0. \forall x \in [-1, \infty): |x - 8| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x+1} - 3| < \varepsilon$

• Sea $\varepsilon > 0$.

nosotros queremos encontrar δ : $|x - 8| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x+1} - 3| < \varepsilon$

$$|\sqrt{x+1} - 3| = \left| \frac{(\sqrt{x+1} - 3)(\sqrt{x+1} + 3)}{\sqrt{x+1} + 3} \right|$$

$$= \frac{|(x+1) - 9|}{|\sqrt{x+1} + 3|} = \frac{|x - 8|}{\underbrace{|\sqrt{x+1} + 3|}_{> 0}} \leq \frac{|x - 8|}{3} \leq |x - 8|$$

$$\delta = 3\varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall x \in [-1, \infty): |\sqrt{x+1} - 3| \leq \frac{|x - 8|}{3}$$

si tomamos $\delta = \varepsilon$.

$$\text{si } |x - 8| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x+1} - 3| \leq \frac{|x - 8|}{3} < \frac{\delta}{3} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x+1} - 3| < \varepsilon.$$

$$|f(x)-1| \leq \dots \leq \dots \leq \left[\frac{\delta + \dots}{\dots} \leq \varepsilon \right]$$

$$\forall x \in (1, \infty) : \left| \sqrt{x+1} - 3 \right| \leq \frac{|x-8|}{3}$$

$$\text{s.t. } |x-8| \leq \delta : \left| \sqrt{x+1} - 3 \right| \leq \frac{|x-8|}{3} \leq \frac{\delta}{3} \leq \varepsilon$$

$$\frac{\delta}{3} \leq \varepsilon \Rightarrow \boxed{\delta \leq 3\varepsilon} \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{100}$$

$$\text{s.t. } |x-8| \leq \delta \Rightarrow \left| \sqrt{x+1} - 3 \right| \leq \frac{|x-8|}{3} \leq \frac{\delta}{3} = \frac{\varepsilon}{300} \leq \varepsilon.$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 : \forall x \in \text{Dom}(f) : \\ |x| > R \Rightarrow \underline{|f(x) - L|} < \varepsilon.$$

(b) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Muestre que $N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ y $F = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \mathbb{R}^n, Ax = y\}$ son s.e.v. de $\mathbb{R}^n$

N s.e.v. $\mathbb{R}^n$: • $N \neq \emptyset$

• $x_1, x_2 \in N, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 + \lambda x_2 \in N$.

• $x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = 0$

$0 \in \mathbb{R}^n : A \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 \in N \Rightarrow N \neq \emptyset$ ✓

• Sea $x_1, x_2 \in N, \lambda \in \mathbb{R}$ ✓

P.D.Q.: $x_1 + \lambda x_2 \in N \Leftrightarrow x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n : A(x_1 + \lambda x_2) = 0$

Supongamos que $x_1 + \lambda x_2 \notin N \Leftrightarrow A(x_1 + \lambda x_2) \neq 0$

$\Leftrightarrow Ax_1 + \lambda Ax_2 \neq 0$

Por otro lado sabemos que $A \neq 0$ y $x_1 + \lambda x_2 \neq 0$.

Veamos que $A(x_1 + \lambda x_2) = 0$, por ello:

$$A(x_1 + \lambda x_2) = \underbrace{Ax_1}_{=0} + \lambda \underbrace{Ax_2}_{=0} = 0$$

$x_1 \in N \quad x_2 \in N$

$\Rightarrow x_1 + \lambda x_2 \in N \Rightarrow N$ es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

$$F = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = y\}$$

$$\bullet \underline{F \neq \emptyset} : 0 \in F \quad [0 \in \mathbb{R}^n : 0 \in \mathbb{R}^n : A \cdot 0 = 0]$$

$$\bullet \text{ Soit } y_1, y_2 \in F, \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\underline{\text{P.D.}} : y_1 + \lambda y_2 \in F \Leftrightarrow y_1 + \lambda y_2 \in \mathbb{R}^n, \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = y_1 + \lambda y_2$$

$$y_1 \in F \Rightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R}^n : Ax_1 = y_1$$

$$y_2 \in F \Rightarrow \exists x_2 \in \mathbb{R}^n : Ax_2 = y_2$$

$$y_1 + \lambda y_2 = Ax_1 + \lambda Ax_2 = A(\underbrace{x_1 + \lambda x_2}_{\in \mathbb{R}^n})$$

$$\Rightarrow x = x_1 + \lambda x_2 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = y_1 + \lambda y_2$$

$$\Rightarrow y_1 + \lambda y_2 \in F \Rightarrow F \text{ est s.e.v. de } \mathbb{R}^n.$$

P6. (a) Considere las matrices cuadradas $A, B \in M_{nn}(\mathbf{K})$. Demuestre que :

i) A es invertible si y solo si AA^t es invertible.

$\Rightarrow$ Supongamos que A es invertible

P.D.O: AA^t es invertible $\Leftrightarrow \exists C \in M_{nn} : CAA^t = AA^tC = I$

sabemos que A es invertible : $AB = BA = I$
 $\exists B \in M_{nn}$.

$$C = (AA^t)^{-1} = (A^t)^{-1}A^{-1} = B^tB.$$

$$C = B^tB$$

$$C \cdot AA^t = B^t \underbrace{BA}_{I} A^t = B^t A^t = (AB)^t = I.$$

$$C \cdot AA^t = I$$

$\Leftarrow$

P3. Sean A, B, C, D conjuntos no vacíos tales que $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$, y sean $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$ dos funciones. Se define $h : A \cup C \rightarrow B \cup D$ tal que $\forall x \in A \cup C$:

$$h(x) \doteq \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in C \end{cases}$$

(a) Demuestre que si f y g son inyectivas, entonces h también lo es.

Γh es inyectiva $\Rightarrow$ sea $x_1, x_2 \in A \cup C$: $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$

sea $x_1, x_2 \in A \cup C$: $h(x_1) = h(x_2)$

PDO: $x_1 = x_2$

• $x_1 \in A, x_2 \in C \Rightarrow h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = g(x_2)$

$f(x_1) \in B$; $g(x_2) \in D$

$f(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(x_1) \in B \cap D$ ~~$\times$~~

• $x_1, x_2 \in A \Rightarrow h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\downarrow$
 f es inyectiva.

• $x_1, x_2 \in C \Rightarrow h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\downarrow$
 g es inyectiva

$\Rightarrow h$ es inyectiva.

(b) Muestre que la proposición:

$$V \Rightarrow P(x)$$

$$(\exists y)[p(y) \Rightarrow (\forall x)p(x)]$$

es verdadera. para cada predicado p .

• Caso 1: $\exists y: p(y) \Leftrightarrow F$

$$\Rightarrow [p(y) \Rightarrow (\forall x)p(x)]$$

$$\Leftrightarrow [F \Rightarrow (\forall x)p(x)] \Leftrightarrow V.$$

$V \Rightarrow V$	$\Leftrightarrow V$
$V \Rightarrow F$	$\Leftrightarrow F$
$F \Rightarrow V$	$\Leftrightarrow V$
$F \Rightarrow F$	$\Leftrightarrow V$

• Caso 2: $[\neg \exists y: p(y) \Leftrightarrow F] \Leftrightarrow [\forall y: p(y) \Leftrightarrow V]$

$$[p(y) \Rightarrow (\forall x)p(x)] \Leftrightarrow [p(y) \Rightarrow V]$$

Sea y cualquiera: $p(y) \Leftrightarrow V$

$$\Rightarrow [V \Rightarrow V] \Leftrightarrow V.$$

$$\Rightarrow (\exists y) [p(y) \Rightarrow (\forall x)p(x)]$$