Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN700-1 Matemáticas para Economistas
18 de Marzo de 2021

Pauta Clase Auxiliar #1

Profesor: Leonel Huerta
Auxiliar: Matías Altamirano

P1. **(a)** Sean p,q y s proposiciones lógicas. Pruebe que la siguiente proposición es una tautología:

$$[(p \implies \overline{q}) \wedge (s \implies q)] \implies (p \implies \overline{s})$$

Solución:

$$\begin{aligned}
[(p \implies \overline{q}) \wedge (s \implies q)] \implies (p \implies \overline{s}) &\iff [(\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge (\overline{s} \vee q)] \implies (\overline{p} \vee \overline{s}) \\
&\iff \overline{(\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge (\overline{s} \vee q)} \vee (\overline{p} \vee \overline{s}) \\
&\iff \overline{(\overline{p} \vee \overline{q})} \vee \overline{(\overline{s} \vee q)} \vee (\overline{p} \vee \overline{s}) \\
&\iff (p \wedge q) \vee (s \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \vee \overline{s}) \\
&\iff [(p \wedge q) \vee \overline{p}] \vee [(s \wedge \overline{q}) \vee \overline{s}] \\
&\iff q \vee \overline{p} \vee \overline{q} \vee \overline{s} \\
&\iff V \vee \overline{p} \vee \overline{s} \\
&\iff V
\end{aligned}$$

(b) Muestre que la proposición:

$$(\exists y)[p(y) \implies (\forall x)p(x)]$$

Es verdadera para cada predicado p.
Solución:
Veamos esto por casos,

- Supongamos que $\exists y : p(y) \iff F$, en ese caso tenemos que:

$$[p(y) \implies (\forall x)p(x)] \iff [F \implies (\forall x)p(x)] \iff V$$

  Esto debido a que tanto $[F \implies F] \iff V$ como $[F \implies V] \iff V$, por lo tanto para cualquier valor de verdad de $p(x)$ es tautología.
- El otro caso es que $\nexists y : p(y) \iff F$ esto es equivalente a decir que $\forall x : p(x) \iff V$. Luego considerando cualquier y tenemos que:

$$[p(y) \implies (\forall x)p(x)] \iff [V \implies (\forall x)V] \iff V$$

P2. Sean A, B y C tres conjuntos. Demuestre que:

(a) $A\Delta B = A\Delta C \implies B = C$
Solución:
Recordemos que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$.
Supongamos que $B \neq C$, sin perdida de generalidad $\exists x \in B \setminus C \implies x \in B, x \notin C$

- Si $x \in A \implies x \in A \cap B \implies x \notin A\Delta B$ esto ya que $x \in B$. Por otro lado como $x \notin C$ esto implica que $x \notin A \cap C$ y $x \in A \cup C \implies x \in A\Delta C \implies A\Delta C \neq A\Delta B$
- Si $x \notin A \implies x \in A^c, x \in C^c \implies x \in A^c \cap C^c \implies x \in (A \cup C)^c \implies x \notin (A \cup C) \implies x \notin A\Delta C$. Por otro lado tenemos que $x \notin A \implies x \notin A \cap B$ y como $x \in B \implies x \in A \cup B$, por lo tanto $x \in A\Delta B \implies A\Delta B \neq A\Delta C$

(b) $A \cap B = \emptyset \iff (A \cup B) \setminus B = A$
Solución:
Primero notemos que $(A \cup B) \setminus B = (A \cup B) \cap B^c = (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c) = (A \setminus B) \cup \emptyset = (A \setminus B)$

$(\implies)$ $A = (A \cap (B \cup B^c)) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) = \emptyset \cup (A \setminus B) = A \cup B) \setminus B$

$(\impliedby)$ Supongamos que $\exists x \in A \cap B \implies A \setminus B \subseteq A \setminus \{x\} \subsetneq A \implies (A \cup B) \setminus B = A \setminus B \neq A$

P3. Sean A, B, C, D conjuntos no vacios tales que $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$, y sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos funciones. Se define $h : A \cup C \to B \cup D$ tal que $\forall x \in A \cup C$:

$$h(x) \doteq \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ \\ g(x) & \text{si} \quad x \in C \end{cases}$$

(a) Demuestre que si f y g son inyectivas, entonces h también lo es.
Solución:
Para que h sea inyectiva se tiene que cumplir que $\forall x, y \in A \cup C, h(x) = h(y) \implies x = y$. Entonces sea $x, y \in A \cup C, h(x) = h(y)$. Luego tenemos 4 posibles casos:

- Si $x \in A, y \in C \implies f(x) = g(y) \implies f(x) \in B \cap D$ lo cual es una contradicción, por lo que no puede pasar que $x \in A, y \in C$. El caso $x \in C, y \in A$ es análogo.
- Si $x, y \in A \implies f(x) = f(y)$ y como sabemos que f es inyectiva entonces $x = y$
- Si $x, y \in C \implies g(x) = g(y)$ y como sabemos que g es inyectiva entonces $x = y$

Por lo tanto h es inyectiva.

(b) Demuestre que si f y g son epiyectivas, entonces h también lo es. Para que h sea epiyectiva se debe cumplir que $\forall y \in B \cup D, \exists x \in A \cup C : y = h(x)$. Entonces sea $y \in A \cup D$. Veamos los casos:

- Si $y \in B$, como f es epiyectiva entonces $\exists x \in A : y = f(x)$, luego $y = h(x)$.
- Si $y \in D$, como g es epiyectiva entonces $\exists x \in C : y = g(x)$, luego $y = h(x)$.

(c) Demuestre que si f y g son biyectivas, entonces h también lo es y encuentre su inversa.
sol
Como f, g son biyectivas luego son inyectivas y por (a) tenemos que h es inyectiva. Por otro lado también son epiyectivas luego por (b) h también lo es.

$$h(y)^{-1} \doteq \begin{cases} f(y)^{-1} & \text{si} \quad y \in B \\ \\ g(y)^{-1} & \text{si} \quad y \in D \end{cases}$$

P4. **(a)** Determine, de existir, el valor de los siguientes límites de sucesiones:

i) $\lim \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}$, con $0 < a < b$
Solución:
Primero trabajamos la expresión, si multiplicamos arriba y abajo por $\frac{1}{b^{n+1}}$, obtenemos:

$$\frac{(a^n + b^n)\frac{1}{b^{n+1}}}{(a^{n+1} + b^{n+1})\frac{1}{b^{n+1}}} = \frac{(\frac{a}{b})^n \frac{1}{b} + \frac{1}{b}}{(\frac{a}{b})^n \frac{a}{b} + 1}$$

Como $0 < a < b$, entonces $\frac{a}{b} < 1$ y entonces tenemos que si tomamos límite todo lo de la forma $(\frac{a}{b})^n$ se va a 0, por lo que:

$$\lim \frac{(\frac{a}{b})^n \frac{1}{b} + \frac{1}{b}}{(\frac{a}{b})^n \frac{a}{b} + 1} = \frac{1}{b}$$

ii) $\lim \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n+k}\right)^2$
Solución:
Primero notemos que $\left(\frac{1}{n+k}\right)^2 > 0, \forall k = 1, ..., n$. Ahora como $k > 0$ podemos acotar de la siguiente forma:

$$0 < \left(\frac{1}{n+k}\right)^2 < \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

y aplicando sumatoria a todo tenemos que:

$$0 < \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right)^2 < \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}$$

Luego aplicando teorema del Sandwich, concluimos que el límite es 0.

(b) Demuestre,usando la definición de límite de funciones, que:

$$\lim_{x\to 8}\sqrt{x+1} = 3$$

Solución:
Recordemos lo que tenemos que mostrar es que :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in A : |x-8| \leq \delta \implies |\sqrt{x+1}-3| \leq \varepsilon$$

Para ello sea $\varepsilon > 0$, estudiemos lo siguiente:

$$|\sqrt{x+1}-3| = \left|\frac{(\sqrt{x+1}-3)(\sqrt{x+1}+3)}{\sqrt{x+1}+3}\right| = \left|\frac{x-8}{\sqrt{x+1}+3}\right| \leq \left|\frac{x-8}{3}\right| \leq |x-8|$$

Esto nos dice que si tomamos $\delta = \varepsilon$ tenemos que

$$\forall x \in A : |x-8| \leq \delta \implies |\sqrt{x+1}-3| \leq \varepsilon$$

P5. Derive las siguientes funciones de variable real a valores reales:

(a) $f(x) = x^x$
Solución:
$f'(x) = (x^x)' = (e^{\ln(x^x)})' = (e^{x\ln(x)})' = (e^{x\ln(x)})(\ln(x)+1) = x^x(\ln(x)+1)$

(b) $g(x) = -(\sqrt{2x-1})x^{2x}$
Solución:
$g(x)' = -\dfrac{x^{2x}}{\sqrt{2x-1}} - (\sqrt{2x-1})x^{2x}(2\ln(x)+2)$

P6. (a) Considere las matrices cuadradas $A, B \in \mathbf{M}_{nn}(\mathbf{K})$. Demuestre que :

i) A es invertible si y solo si AA^t es invertible.
Solución:

$(\implies)$ Ya que A es invertible $\exists B$ tal que $AB = BA = I$. Ahora si consideramos $C = B^tB$ obtenemos:

$$\begin{aligned} AA^tC &= AA^tB^tB \\ &= A(BA)^tB \\ &= AIB \\ &= AB \\ &= I \end{aligned}$$

Luego AA^t es invertible.

$(\impliedby)$ Ya que AA^t es invertible $\exists B$ tal que $AA^tB = BAA^t = I$. Luego $A(A^tB) = I$ y A es invertible.

ii) Si $A^2 = A$ y $B = I - A$ entonces $B^3 = B$. Si A es invertible, calcule las matrices A y B.
Solución:

$$\begin{aligned}
B^3 &= (I-A)(I-A)(I-A)\\
&= (I^2 - AI - IA - A^2)(I-A)\\
&= (I-2A-A)(I-A)\\
&= (I-A)(I-A)\\
&= I^2 - AI - IA - A^2\\
&= I^2 - 2A - A\\
&= I - A\\
&= B
\end{aligned}$$

Si A es invertible y $A = A^2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
A = A^2 &\implies A^{-1}A = A^{-1}AA\\
&\implies I = A\\
&\implies B = I - I = 0
\end{aligned}$$

(b) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbf{R})$. Muestre que $N = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ y $F = \{y \in \mathbb{R}^n | \exists x \in R^n, Ax = y\}$ son s.e.v. de $\mathbb{R}^n$
Solución:
Claramente $0 \in N$ por lo que $N \neq \emptyset$. Ahora sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in N$, queremos probar que $x + \lambda y \in N$. En efecto:

$$A(x + \lambda y) = Ax + A\lambda y = \underbrace{Ax}_{0} + \lambda \underbrace{Ay}_{0} = 0$$

Por lo que $x + \lambda y \in N$ y N es un s.e.v de $\mathbb{R}^n$
Por otro lado, notemos que $0 \in F$, ya que $0 \in \mathbb{R}^n$ cumple que $0A = 0$. Luego $F \neq \emptyset$.. Ahora sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in F$, queremos probar que $y_1 + \lambda y_2 \in F$. En efecto, $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$, luego:

$$y_1 + \lambda y_2 = Ax_1 + \lambda A x_2 = A \underbrace{(x_1 + \lambda x_2)}_{\in \mathbb{R}^n}$$

Por lo que $y_1 + \lambda y_2 \in F$ y F es un s.e.v de $\mathbb{R}^n$

(c) Sea la siguiente matriz, para cierto $b \in \mathbb{R}$

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0\\ -2 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Muestre que $\lambda = 1$ es valor propio de B sin importar el valor de b.
Solución:
Para esto, comencemos estudiando el polinomio característico:

$$\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix} b-\lambda & 0 & 0\\ -2 & -1-\lambda & 2\\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right| &= (b-\lambda)\left|\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2\\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right|\\
&= (b-\lambda)[(-1-\lambda)(2-\lambda) + 2]\\
&= (b-\lambda)[(-2-\lambda+\lambda^2) + 2]\\
&= (b-\lambda)(-\lambda+\lambda^2)\\
&= (b-\lambda)\lambda(\lambda-1)
\end{aligned}$$

Luego los valores propios de B son $b, 1$ y 0.