

Clase Auxiliar #1

Profesor: Leonel Huerta
Auxiliar: Matías Altamirano

P1. (a) Sean p, q y s proposiciones lógicas. Pruebe que la siguiente proposición es una tautología:

$$[(p \implies \bar{q}) \wedge (s \implies q)] \implies (p \implies \bar{s})$$

(b) Muestre que la proposición:

$$(\exists y)[p(y) \implies (\forall x)p(x)]$$

Es verdadera para cada predicado p .

P2. Sean A, B y C tres conjuntos. Demuestre que:

(a) $A \Delta B = A \Delta C \implies B = C$

(b) $A \cap B = \emptyset \iff (A \cup B) \setminus B = A$

P3. Sean A, B, C, D conjuntos no vacíos tales que $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$, y sean $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$ dos funciones. Se define $h : A \cup C \rightarrow B \cup D$ tal que $\forall x \in A \cup C$:

$$h(x) \doteq \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in C \end{cases}$$

(a) Demuestre que si f y g son inyectivas, entonces h también lo es.

(b) Demuestre que si f y g son epiyectivas, entonces h también lo es.

(c) Demuestre que si f y g son biyectivas, entonces h también lo es y encuentre su inversa.

P4. (a) Determine, de existir, el valor de los siguientes límites de sucesiones:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}$, con $0 < a < b$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n+k} \right)^2$

(b) Demuestre, usando la definición de límite de funciones, que $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x+1} = 3$

P5. Derive las siguientes funciones de variable real a valores reales:

(a) $f(x) = x^x$

(b) $g(x) = -\sqrt{2x-1}x^{2x}$

P6. (a) Considere las matrices cuadradas $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Demuestre que:

i) A es invertible si y solo si AA^t es invertible.

ii) Si $A^2 = A$ y $B = I - A$ entonces $B^3 = B$. Si A es invertible, calcule las matrices A y B .

(b) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Muestre que $N = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ y $F = \{y \in \mathbb{R}^n | \exists x \in \mathbb{R}^n, Ax = y\}$ son s.e.v. de $\mathbb{R}^n$

(c) Sea la siguiente matriz, para cierto $b \in \mathbb{R}$

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Muestre que $\lambda = 1$ es valor propio de B sin importar el valor de b .