Pauta Auxilair 2

Equilibrio de Nash, Cournot y Bertrand

Prof: Rahmi Ilkilic
Auxiliares: Paz Montaño Kerdy - Araceli Ramirez.

Pregunta 1 - Equilibrio de Nash

Pregunta 1.1 - EIEED

Calcule todos los equilibrios Nash del juego.

J	**D**	**E**	**F**
A	3,3	10,1	1,2
B	0,1	8,3	4,0
C	5,6	7,1	6,5

Solución:

- D > F, independiente de lo que juegue el J1 al J2 le reporta mayor utilidad jugar la estrategia D. Se elimina la EED :E

J	**D**	**E**
A	3,3	10,1
B	0,1	8,3
C	5,6	7,1

- A > B, independiente de lo que juegue el J2 (Estrategias restantes) al J1 le reporta mayor utilidad jugar la estrategia A. Se elimina la EED :B

J	**D**	**E**
A	3,3	10,1
C	5,6	7,1

- D > E, independiente de lo que juegue el J1 (Estrategias restantes) al J2 le reporta mayor utilidad jugar la estrategia D, si el J1 juega A el J2 prefiere 3 sobre 1 y si el J1 juega C el J2 prefiere 6 sobre 1. Se elimina la EED :E

J	**D**
A	3,3
C	5,6

- Finalmente el J1 elige la estrategia C dado que es la que le reporta mayor utilidad, de esta forma el Equilibrio de Nash se encuentra dado por:

$$EN = \{(C, D)\}$$

Pregunta 1.2 - Función de mejor respuesta (BR).

Hay dos jugadores. Cada jugador elige un número entero entre 1 y 3, es decir, para cada jugador i, su conjunto de estrategias es $S_i = \{1, 2, 3\}$. Es un juego simétrico y podemos escribir los pagos del jugador 1 como:

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} s_2 & \text{si } s_1 \leq s_2 \\ s_1 & \text{si } s_1 = s_2 \\ \frac{3}{5}s_1 & \text{si } s_1 \geq s_2 \end{cases} \tag{1}$$

(a) Modele la situación como un juego en forma normal y escriba la matriz de pagos.
(b) Encuentre todos los EN en puras del juego.

Solución: Escribimos el juego en formal normal:

- **Jugadores** $i \in I = \{1, 2\}$
- **Estrategias** $S_i = \{1, 2, 3\} \quad \forall i \in I$
- **Matriz de pagos:**

J	**1**	**2**	**3**
1	1,1	$2, \frac{6}{5}$	$3, \frac{9}{5}$
2	$\frac{6}{5}, 2$	2,2	$3, \frac{9}{5}$
3	$\frac{9}{5}, 3$	$\frac{9}{5}, 3$	3,3

Nos damos cuenta de que no existen estratégias estrictamente dominadas que podamos eliminar, por lo que realizamos la búsqueda de los equilibrios de Nash mediante las intersecciones de mejores respuestas del juego:

J	**1**	**2**	**3**
1	1,1	$\underline{2}, \frac{6}{5}$	$\underline{3}, \underline{\frac{9}{5}}$
2	$\frac{6}{5}, \underline{2}$	$\underline{2}, \underline{2}$	$\underline{3}, \frac{9}{5}$
3	$\underline{\frac{9}{5}}, \underline{3}$	$\frac{9}{5}, \underline{3}$	$\underline{3}, \underline{3}$

$$\cap BR = EN = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$$

Pregunta 1.3 - Dominancia Débil.

Calcule los Equilibrios de Nash para el siguiente juego

J	**L**	**R**
U	1,1	0,0
D	0,0	0,0

Solución:

Si nos fijamos en el J1, cuando el jugador 2 juega L , el jugador 1 obtiene pagos de 1 si juega la estrategia U y 0 si juega la estrategia D, por lo que existe un $s_{-i} \in S_{-i}$ tal que:

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(\hat{s}_i, s_{-i})$$

, no obstante cuando el jugador 2 juega R el jugador 1 no prefiere ninguna estrategia por sobre la otra dado que ambas le reportan la misma utilidad, gana 0 en ambos casos, por lo que podemos decir que la estrategia U domina levemente a la estrategia D.

- No podemos eliminar la estrategia D dado que no es una estrategia estrictamente dominada, dado que es un juego simétrico el jugador 2 tampoco posee estrategias estrictamente dominadas y para encontrar el equilibrio de Nash se debe **analizar la intersección de mejores respuestas.**

J	**L**	**R**
U	$\underline{1}$,$\underline{1}$	$\underline{0}$,0
D	0,$\underline{0}$	$\underline{0}$,$\underline{0}$

$$EN = \{(U, L), (D, R)\}$$

Pregunta 1.4 - Función de mejor Respuesta.

Dos estudiantes deciden simultáneamente cuánto estudiar $e_i \in [0, 1]$. Las funciones de utilidad de los estudiantes son:

$$u_1(e) = ln(1 + 3e_1 - e_2) - e_1, \quad u_2(e) = ln(1 + 3e_2 - e_1) - e_2$$

El término negativo de la utilidad de 1 refleja el costo de oportunidad del tiempo dedicado al estudio, mientras que el término positivo refleja los beneficios de estudiar sobre la nota considerando que mientras más estudie el otro estudiante menor será la nota propia (asumiendo que la escala de notas se ajusta).

(a) Encuentre la función de mejor respuesta del jugador 1. Encuentre todos los EN del juego.
(b) Sea $e = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Muestre que cada uno de los jugadores prefiere el perfil e por sobre el perfil encontrado en a. Explique por qué los jugadores están mejor esforzándose menos que en el EN. Discuta además por qué el perfil $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ no es sostenible en un EN.
(c) Suponga ahora que el costo de del tiempo del jugador 1 es más alto, de modo que su función de utilidad es

$$v_1(e) = ln(1 + 3e_1 - e_2) - (1 + \alpha)e_1$$

donde $\alpha \geq 0$. La función de utilidad del jugador 2 no cambia. Grafique las nuevas funciones de mejor respuesta y explique, sin hacer cálculos, cómo se compara el nuevo EN con la solución encontrada en (a). Discuta

Solución:

(a) Modele el problema como un Juego en Forma Normal: Para econtrar la función de mejor respuesta debemos optimizar nuestra elección en función de lo que elige el otro jugador:

$$e \in \underset{e_1}{argamax} u(e) = ln(1 + 3e_1 - e_2) - e_1$$

- Imponemos las condiciones de primer orden: $\frac{\partial u}{\partial e_1} = \frac{1}{1+3e_1-e_2} * 3 - 1 = 0$
- Por lo que obtenemos la función de mejor respuesta: $e_1 = BR(e_2) = \frac{2+e_2}{3}$
- Análogamente, para el jugador 2 tenemos que: $e_2 = BR(e_1) = \frac{2+e_1}{3}$

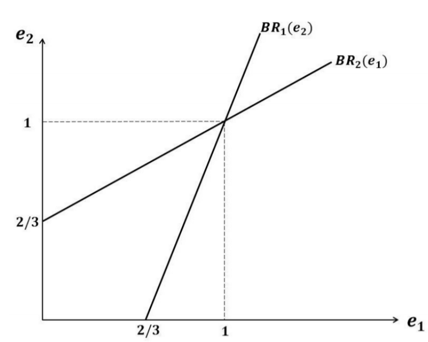

Figura 1: Gráfico de Función de Mejor Respuesta.

Para encontrar el EN tenemos 2 opciones:

1. Reemplazar en las funciones de mejor respuesta ya que el EN es la intersección de las funciones de mejor respuesta:

$$e_1 = BR(e_2) = \frac{2+e_2}{3} = \frac{2+\frac{2+e_1}{3}}{3} = 1$$
$$e_2 = 1$$

2. Como el juego es **simétrico**, imponemos $e_1 = e_2$ por lo que tenemos que:

$$e_1 = \frac{2+e_1}{3}$$

$$e_1 = e_2 = 1$$

Luego el único EN es:

$$EN = (1, 1)$$

(b) Sea $e = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Muestre que cada uno de los jugadores prefiere el perfil e por sobre el perfil encontrado en a. Explique por qué los jugadores están mejor esforzándose menos que en el EN. Discuta además por qué el perfil $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ no es sostenible en un EN.

Para ver si es mejor opción para un jugador hay que ver

$$u(e = (1, 1)) >< u(e = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$$

Evaluando...

$$u(e = (1, 1)) = ln(1 + 3 * 1 - 1) - 1 = ln(3) - 1$$
$$u(e = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = ln(1 + 3 * \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = ln(2) - \frac{1}{2}$$

Vemos que:

$$ln(3) - 1 < ln(2) - \frac{1}{2}$$

$$ln(3) - ln(2) < \frac{1}{2}$$

$$ln(\frac{3}{2}) < \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} < e^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{9}{4} < e \sim 2.718$$

Entonces vemos que si prefiere el perfil $e = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
Finalmente, nos hacemos la pregunta de que por qué el perfil $e = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ no es EN?. Esto es porque los jugadores tienen incentivos a desviarse, es decir, si el otro jugador juega $e_2 = \frac{1}{2}$ entonces prefiero jugar algo distinto a $e_1 = \frac{1}{2}$.

Si lo vemos en la función de mejor respuesta:

$$e_1 = BR(e_2) = \frac{2 + \frac{1}{2}}{3} = \frac{5}{6}$$

que entrega utilidad mayor a $e_1 = \frac{1}{2}$

(c) Suponga ahora que el costo del tiempo del jugador 1 es más alto, de modo que su función de utilidad es

$$v_1(e) = ln(1 + 3e_1 - e_2) - (1 + \alpha)e_1$$

donde $\alpha \geq 0$. La función de utilidad del jugador 2 no cambia. Grafique las nuevas funciones de mejor respuesta y explique, sin hacer cálculos, cómo se compara el nuevo EN con la solución encontrada en (a). Discuta

Volvemos a encontrar la función de mejor respuesta para el jugador 1 (el del jugador 2 se mantiene igual):

$$e \in \underset{e_1}{argamax} u(e) = ln(1 + 3 * e_1 - e_2) - (1 + \alpha)e_1$$

Imponemos las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial u}{\partial e_1} = \frac{1}{1 + 3e_1 - e_2} * 3 - (1 + \alpha) = 0$$

Por lo que obtenemos la función de mejor respuesta:

$$e_1 = BR(e_2) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{1 + \alpha} + e_2 - 1\right)$$

Gráficamente, se ve de la siguiente forma:

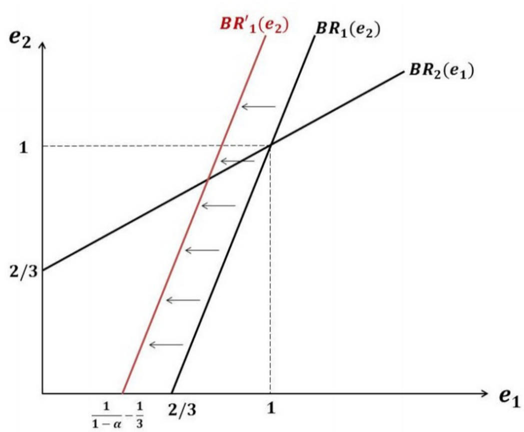

Figura 2: Gráfico de Función de Mejor Respuesta cuando el costro del tiempo del jugador 1 aumenta.

Pregunta 2 - Competencia de Cournot

Existen 3 firmas en un mercado A,B,C compitiendo a la Cournot en un mercado con demanda inversa $P = 15 - Q$. Cada firma decide cuanto producir. Los costos marginales de cada firma son $MC_A = 1, MC_B = 2, MC_C = 3$. Encuentre el precio de equilibrio y las utilidades de las firmas.

Solución:

Modelamos el juego Cournot:

- Jugadores: firmas $i \in I = \{A, B, C\}$
- Firmas eligen cantidades $q_i \in R_+$
- Utilidades de las firmas: $u_i(q_i, q_{-i}) = (15 - Q)q_i - c_i q_i$

Encontramos las funciones de mejor respuesta para cada firmas:

$$max \quad u_i = (15 - Q)q_i - c_i q_i = (15 - q_i - q_j - q_k)q_i - c_i q_i$$

Escribimos la condición de primer orden:

$$\frac{\partial u_i}{\partial q_i} = 15 - 2q_i - q_j - q_k - c_i = 0$$

$$\Rightarrow q_i = \frac{15 - q_j - q_k - c_i}{2}$$

Luego para cada firma en particular:

$$q_A = \frac{15 - q_B - q_C - 1}{2}$$

$$q_B = \frac{15 - q_A - q_C - 2}{2}$$

$$q_C = \frac{15 - q_A - q_B - 3}{2}$$

Intersectamos las funciones de mejor respuesta para encontrar el EN. En este caso sumamos para encontrar el precio:

$$q_A + q_B + q_C = \frac{3 * 15 - 2(q_A + q_B + q_C) - 6}{2}$$

$$\Rightarrow q_A + q_B + q_C = \frac{39}{4} \qquad p^* = \frac{21}{4}$$

Luego, podemos despejar para cada firma en específico:

$$q_A = \frac{17}{4} \quad q_B = \frac{13}{4} \quad q_C = \frac{9}{4}$$

Con eso podemos despejar las utilidades:

$$u_A = \left(\frac{17}{4}\right)^2 \quad u_B = \left(\frac{13}{4}\right)^2 \quad u_C = \left(\frac{9}{4}\right)^2$$

Pregunta 3 - Competencia de Bertrand /P2. Primavera 2021

Hay dos firmas, Hal & Sons y la Iglesia , que producen el mismo producto. Función de costo de Firma A es $c_H(q_H) = (q_H)^2$ y función de costo de Iglesia es $c_I(q_I) = 20q_I$. La función de demanda inversa para el producto es $p = 50 - q$, donde q es la demanda total.

Solución:

(a) Calcule el equilibrio (cantidades y precio) cuando las firmas están competiendo a la Cournot.

1. Utilidad: Las firmas maximizan su utilidad:

$$max \pi_{i \in \{Hal\&Sons, Iglesia\}}$$

   Donde:

$$\pi_i = p \cdot q_i - CT_i(q_i)$$

   Importante, recordar de econo que: $CT_i(q_i) = Cmg_i \cdot q_i$ siempre que Cmg_i sea constante, o bien que CT_i sea lineal, que es equivalente.

$$\pi_I = \underbrace{p}_{50-(q_H+q_I)} \cdot q_I - \underbrace{CT_I(q_I)}_{20 \cdot q_I}$$

   Reordenando queda:

$$\pi_I = 50 \cdot q_I - q_I^2 - q_I q_H - 20 \cdot q_I$$

2. Derivando e igualando a cero:

$$\frac{\partial \pi_I}{\partial q_I} = 50 - q_H - 2q_I - 20 = 0$$

   Despejando queda la función de mejor respuesta:

$$q_I^* = \frac{30 - q_H}{2}$$

3. Análogamente para π_I:

$$\pi_I = \underbrace{p}_{50-(q_H+q_I)} \cdot q_I - \underbrace{CT_I(q_I)}_{20 \cdot q_I}$$

   Reordenando queda:

$$\pi_I = 50 \cdot q_I - q_I^2 - q_I q_H - 20 \cdot q_I$$

   Derivando e igualando a cero:

$$\frac{\partial \pi_I}{\partial q_I} = 50 - q_H - 2q_I - 20 = 0$$

Despejando queda la función de mejor respuesta:

$$q_I^* = \frac{30 - q_H}{2}$$

4. Intersección F.O: Para encontrar los q óptimos, reemplazamos una función de mejor respuesta dentro de otra:

$$\frac{50 - \frac{30 - q_H}{2}}{4} = q_H$$

$$70 + q_H = 8q_H$$

$$\bar{q_H} = 10$$

Reemplazamos $\bar{q_H}$(q_H óptimo) en la función de mejor respuesta de q_I, q_I^*:

$$\bar{q_I} = \frac{30 - 10}{20} = 10$$

5. Finalmente, reemplazamos los dos q's en la función de demanda inversa para sacar el precio de equilibrio:

$$p = 50 - 10 - 10 = 30$$

(b) Ahora considere el caso donde las firmas compiten en precios pero pueden ofrecer sólo números naturales como precio. Suponemos que si las firmas cobran el mismo precio todos los consumidores compran de Hal Sons y nadie compra de la Iglesia. Las firmas deben satisfacer toda la demanda que reciben. Encuentre todos los equilibrios de esta competencia en precios. (Puede ser que hay un s´olo equilibrio o hay múltiples equilibrios.)

1. Utilidades: Se plantean las utilidades por casos de la firma A y B en función del precio

$$\pi_H = \begin{cases} p_H * Q\left(p_H\right) - CT_H\left(Q\left(p_H\right)\right) & p_H \leq p_I \\ p_H * Q\left(p_H\right) - CT_H\left(Q\left(p_H\right)\right) & p_H = p_l \\ 0 & p_I \leq p_H \end{cases}$$

Esto es equivalente a:

$$\pi_H = \begin{cases} p_H * (50 - p_H) - (50 - p_H)^2 & p_H \leq p_I \\ p_H * (50 - p_H) - (50 - p_H)^2 & p_H = p_I \\ 0 & p_I \leq p_H \end{cases}$$

Reordenando terminos llegamos a:

$$\pi_H = \begin{cases} \left(p_H - (50 - p_H)\right)(50 - p_H) & p_H \leq p_I \\ \left(p_H - (50 - p_H)\right)(50 - p_H) & p_H = p_l \\ 0 & p_I \leq p_H \end{cases}$$

Finalmente, despejando tenemos que:

$$\pi_H = \begin{cases} (2p_H - 50)(50 - p_H) & p_H \leq p_I \\ (2p_H - 50)(50 - p_H) & p_H = p_l \\ 0 & p_I \leq p_H \end{cases}$$

2. Entonces, para que la utilidad sea mayor o igual a cero:

$$0 \leq 2p_H - 50 \quad \text{y} \quad 0 \leq 50 - p_H$$

Con lo que obtenemos que para que la utilidad sea mayor o igual a cero, Hal & Sons tendrá que cobrar:

$$25 \leq p_H \leq 50$$

3. Finalmente aplicando la competencia en precio, se tiene que

- Si es precio es 25 o más, Hal & Sons va a obtener beneficios positivos vendiendo toda la demanda.

- Así que en el equilibrio si la Iglesia pone un precio p_I mayor o igual a 25 Hal & Sons va a poner $p_H = p_I$.

- Ahora bien, la iglesia puede fijar p_I=24, Hal & Sons si fija ese precio tendrá utilidades negativas, por lo que la Iglesia podrá fijar entre 20 (su costo marginal) y 24.

- De este modo el equilibrio de Nash es $(p_H, p_I) = (25, 24)$, pues es lo que maximiza su utilidad dado lo que jugará el otro.

- Ahora bien, si bien con $p_H \leq 25$ Hal & Sons tiene utilidades negativas, si $p_I = p_H - 1$ entonces sigue teniendo utilidades 0, por lo que puede seguir bajando sus precios sin perder utilidades.

- Por ende, hay múltiples equilibrios: (21,20), (22,21), (23,22), (24,23) y (25,24). *Hal & Sons no bajará de 21 porque ahí si que tendrá utilidades negativas.*

Figura 3: Resumen Sorpresa

Resumen

Definición: Juegos de Forma Normal

- Jugadores $I = \{1, , ..., n\}$, agentes que toman decisiones.
- Acciones o decisiones para cada jugador (s_i), perfil de acciones S_i para el jugador i $\in I$.
- Pagos para cada jugador i $\in I$, representados por una función de utilidad $u_i(s_i, s_{-i})$, utilidad del jugador i no solo depende de la acción propia sino que también va a depender de la de los rivales.
- Jugadores deciden simultáneamente.

Definición: Mejor Respuesta (BR)
Para un jugador i, una estrategia $s_i \in S_i$ es **una mejor respuesta** a la jugada $s_{-i} \in S_{-i}$ si:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}) \ \forall s_i' \in S_i$$

o equivalentemente

$$\underset{s_i \in S_i}{argmax} \ u_i(s_i, s_{-i})$$

Conjunto de acciones que maximicen la utilidad dada la estrategia de los rivales.

Definición: Dominancia Débil
Una estrategia $s_i \in S_i$ esta débilmente dominada si $\exists \ \hat{s_i} \in S_i$ tal que:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(\hat{s_i}, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_-i$$

y ademas $\exists \ s_{-i} \in S_{-i}$ tal que:

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(\hat{s_i}, s_{-i})$$

Resumen

Definición: Estrategia Estrictamente Dominada (EED)

Un jugador i $\in I$ tiene una **estrategia estrictamente dominada** $s_i \in S_i$ si existe $\hat{s_i} \in S_i$ tal que

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(\hat{s_i}, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S\_i$$

A considerar:

- Dominancia estricta.
- Jugadores racionales, nunca jugaran una EED.
- Jugadores se saben racionales, AD INFINITUM: conocimiento común de la racionalidad.
- Eliminación iterada de Estrategias Estrictamente Dominadas (EIEED).

Definición: Equilibrio de Nash (EN)
Un perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$ es un equilibrio Nash si para cada jugador i se cumple que

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i', s_{-i}^*) \ \forall s_i' \in S_i$$

Características:

- Racionalidad: cada jugador i juega su mejor opción (maximiza sus pagos).
- Nadie se arrepiente de la estrategia que elige. Es decir, manteniendo constante las jugadas de los otros jugadores, el jugador no tiene incentivos para desviarse (no obtiene mejores pagos).
- Pueden existir múltiples EN.

Como encontrar los EN?

1. Intersección de mejores respuestas.
2. Si s^* es solución EIEED $\Rightarrow s^*$ es un EN.
3. Si s^* es EN $\Rightarrow s^*$ sobrevive el proceso de EIEED.

Definición: Juegos de información completa

Se dice que un juego es de **información completa** si cumple con las siguientes suposiciones, en donde, todos los jugadores conocen:

- Los jugadores.
- Todas las posibles estrategies de todos los jugadores.
- Las funciones de pagos de todos los jugadores.

Resumen

Definición: Competencia de Cournot - Qournot

- Cantidad como variable de decisión
- Modelo estático
- Número fijo de firmas N
- 2 Una vez que las cantidades están determinadas el mercado encuentra el precio de equilibrio
- Demanda, dijo la luli: P(Q)= a - Q, $Q = \sum_i^I q_i$, con $a > c \geq 0$
- Competencia imperfecta: Firmas deciden sobre sus cantidades que afectan el precio.
- Costos: $c_i(q_i) = c \cdot q_i$. Si fuese competencia perfecta tendríamos que *precio =costo marginal, pero este no es el caso ajja, el costo marginal se saca de derivar el costo.
- Utilidades: $u_i(q_i, q_{-i}) = P(q_i + q_{-i}) \cdot q_i - c_i q_i$

Definición: Competencia de Bertrand - Pertrand

- Precio como variable de decisión
- Modelo estático con bienes homogéneos
- 2 firmas: i y j (pueden ser más)
- Mismo costo marginal para ambas firmas (pueden haber ejercicios donde no sea así)
- Sin restricciones de capacidad: cada firma suple la demanda entera sin ningún problema
- Competencia imperfecta: Firmas deciden sobre los precios, compitiendo por medio de estos.
- Utilidades: $u_i(q_i, q_{-i}) = P_i \cdot q_i - c_i q_i$
- Paradoja de Bertrand: Firmas venden a costos marginales, resultado eficiente desde la perspectiva de la sociedad, pero no desde la perspectiva de las firmas.