Paz Montaño 2021

Auxiliar 5 - Simplex

Metodo Simplex

Paz Montano [1] Mariana Quiroga[2]

Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Chile

Simplex , 2021

Table of Contents

Table of Contents

Método Simplex

Método Simplex

El método Simplex aprovecha esto y busca la solución óptima moviéndose de una sbf a otra, a través de las aristas del poliedro factible, en una dirección que reduzca los costos. Requiere de una formulación estándar.

1. Formulación Estándar

$$\begin{array}{ll} \min_{x\in\mathbb{R}^n} & c^t x \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Método Simplex

Ejemplo: Trasformar a Formualación Estandar

$$
\begin{array}{lll}
\text{máx} & 4x_1 - 5x_2 & \leq 1 \\
\text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 & \geq 9 \\
 & 4x_1 + 3x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Que debemos hacer:

- Reemplazar máx por mín y multiplicar función objetivo por (-1)
- Añadir variables de holgura x_3, x_4 Se deben añadir variables de holgura en forma de suma o resta dependiendo del signo de la restricción, es decir:
  Reemplazar x_1 (sin restricción $x_1 \geq 0$) por $\left(x_1^+ - x_1^-\right)$ tal que $x_1^+ \geq 0$ y $x_1^- \geq 0$

Método Simplex

Ejemplo : Final de la transformación

PL resultante:

$$\text{mín} -4\left(x_1^+ - x_1^-\right) + 5x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} 2\left(x_1^+ - x_1^-\right) + 3x_2 + x_3 \quad &= 11 \\ 4\left(x_1^+ - x_1^-\right) + 3x_2 \quad - x_4 &= 9 \\ x_1^+, x_1^-, \quad x_2, x_3, x_4 \quad &\geq 0 \end{aligned}$$

Método Simplex

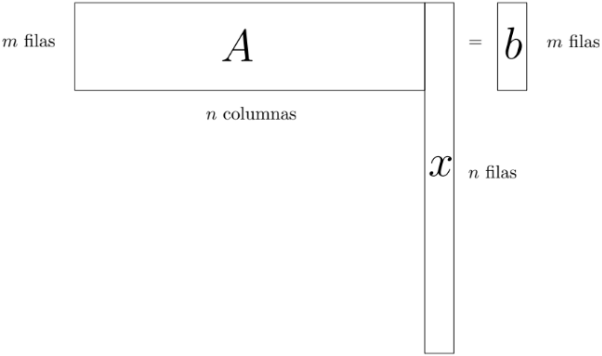


Figure: Visualización de problema de optimización estándar.

Método Simplex

Construir solución básica x

1. Escoger m columnas linealmente independientes $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$, define $A_B := \left[A_{B(1)} A_{B(2)} \ldots A_{B(m)}\right]$
2. Variables **n0 básicas**: $x_j := 0$ para cada variable no básica x_j, un total de $n - m$ variables iguales a 0
3. Variables **Básicas:** resuelve sistema de ecuaciones $A_B \cdot x_B = b$ para los valores de $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$

Observaciones:

- Las variables $x_B = \left(x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}\right)$ son llamadas variables básicas, llamamos $B = (B(1), \ldots, B(m))$ una base.
- Las otras variables son llamadas variables no básicas, denotadas por x_N.

Método Simplex

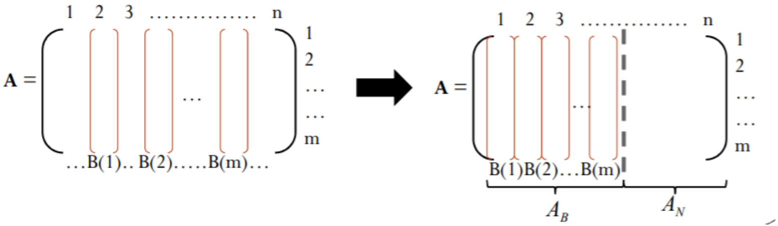


Figure: Visualización de problema de optimización estándar de forma matricial utilizando variables básicas y n0 básicas.

Método Simplex

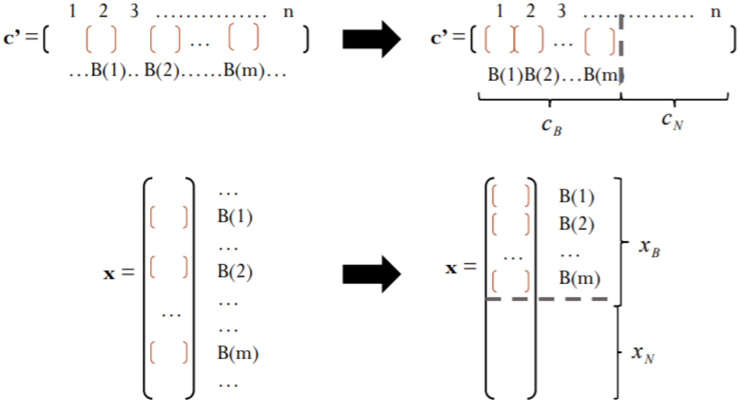


Figure: Visualización costos y solución utilizando variables básicas y n0 básicas..

Método Simplex

Ahora el problema se puede escribir así:

$$\begin{aligned} \text{Min } c_B' x_B + c_N' x_N \quad (1) \\ A_B x_B + A_N x_N = b \quad (2) \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

- Sabemos que en una sbf la matriz A_B es invertible, luego de (2) se tiene:

$$x_B = \underbrace{A_B^{-1} b}_{\bar{b}} - \underbrace{A_B^{-1} A_N}_{\bar{A}_N} x_N \quad (3)$$

- Sean $\bar{b} = A_B^{-1} b, \quad \bar{A}_N = A_B^{-1} A_N \quad \Rightarrow \quad x_B = \bar{b} - \bar{A}_N x_X$
- En las sbf's se tiene que $x_N = 0$, luego $x_B = \bar{b}$

Método Simplex

Reemplazando (3) en (1): $c'_B\left(A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N\right) + c'_N x_N$

$$c'_B A_B^{-1} b + \left(c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N\right) x_N$$

$$c'_B A_B^{-1} b + \bar{c}'_N x_N$$

Costos Reducidos

Donde llamamos costos reducidos a:

$$\bar{c}'_N = c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N$$

Solución Básica

$$x_B = A_B^{-1} b$$

Problema de Optimización

Antes

$$\begin{array}{ll} \min_{x\in\mathbb{R}^n} & c^t x \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Ahora

Luego el problema de optimización queda:

$$\min c_B' A_B^{-1} b + \bar{c}_N' x_N$$

$$x \geq 0$$

Costo Reducido

Costos Reducidos

Donde llamamos costos reducidos a:

$$\bar{c}'_N = c'_N - c'_B A_B^{-1} A_N$$

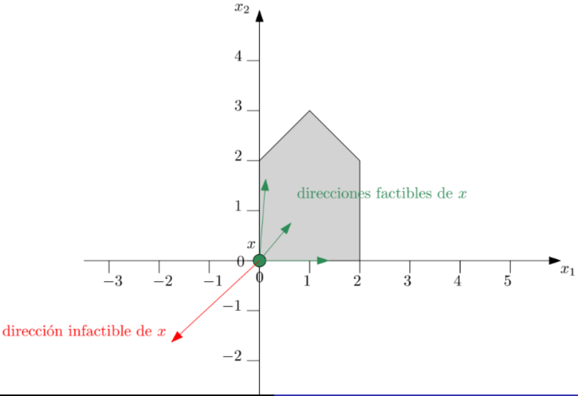
Notar que la existencia de costos reducidos ≤ 0 nos dice que se puede aumentar el valor de una variable no básica (de modo que pasa a básica), disminuyendo el valor de la función objetivo. Esta disminución será de $\bar{c}_i$ por cada unidad que aumentemos de la variable x_i. De este modo, podemos elegir cualquier variable x_i para que entre a la base, siempre y cuando cumpla que $\bar{c}_i \leq 0$. Por convención se escoge la que sea mas negativa porque intuitivamente mejora mas rápido la función objetivo.

Si existe una componente "i" negativa en los costos reducidos, significa que se obtiene un beneficio al aumentar el valor de , por lo que ésta debería dejar de ser una variable no básica (entraría a la base) y, por lo tanto, la base actual no es la óptima.

Dirección Factible

Dirección Factible

Sea $x \in P$. Un vector d es una dirección factible de x si existe un $\theta > 0$ tal que $x + \theta d \in P$.



Dirección Factible

Construcción Dirección Factible.

- Sea $x = (x_B, x_N)$ un vértice
- Sea x_j variable no básica
- Construimos una dirección factible d (que corresponde a x_j)
  - $d_j := 1$
  - $d_i := 0$ para cada variable no básica x_i con $x_i \neq x_j$ d_B : componentes de d que corresponden a variables x_B
  - $d_B := -A_B^{-1} A_j$

si vamos desde x a $y := x + \theta d$ para un $\theta \in \mathbb{R}$ siempre $Ay = b$, tal vez $y \ngeq 0 \Rightarrow y$ es factible si $y \geq 0$

Dirección Factible

Finalmente:

- Al moverse en una dirección d, también se debe verificar si se mantiene la no negatividad de las variables:
  - Las variables no básicas, que valen 0 inicialmente, no sufren cambios, excepto la variable x_j, la que sólo puede aumentar, ya que $d_j = 1$ y $\theta > 0$ Para las variables básicas hay 2 casos: El punto de partida x es no degenerado, lo que implica que $x_B > 0$ y para un θ suficientemente pequeño $x_B + \theta d_B \geq 0$
  - El punto de partida x es degenerado, es decir, existe $x_{B(i)} = 0$, y puede ocurrir que la correspondiente componente de d sea negativa, violando inmediatamente la no negatividad para cualquier valor de θ

$$d_{B(i)} = \left(-A_B^{-1} A_j\right)_{B(i)} < 0$$

Movernos de un vértice a otro

$$
\begin{aligned}
\min\ & -4x_1 - 3x_2 \\
\text{s.a.}\quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
& 20x_1 + x_2 \leq 60 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Movernos de un vértice a otro

$$\begin{aligned} \min\ & -4x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.}\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 20x_1 + x_2 \leq 60 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & -4x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.}\ & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ & 20x_1 + x_2 + x_5 = 60 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Movernos de un vértice a otro

$$\min -4x_1 - 3x_2$$
$$\text{s.a.} \quad x_1 + x_2 \leq 4$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$20x_1 + x_2 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min -4x_1 - 3x_2$$
$$\text{s.a.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 6$$
$$20x_1 + x_2 + x_5 = 60$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

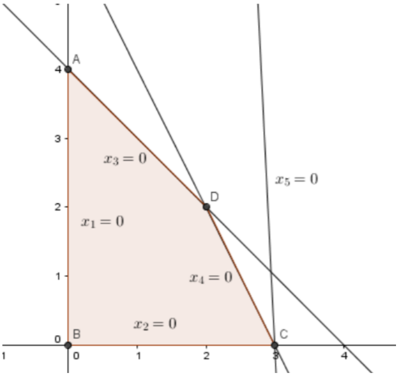


Figure: Bases Vert. C.

Movernos de un vértice a otro

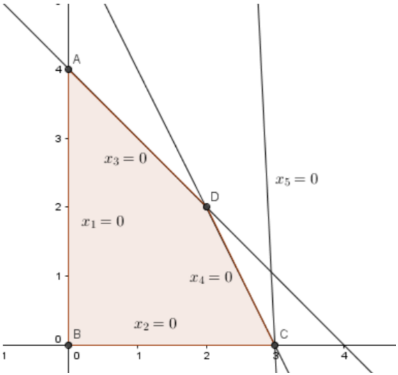


Figure: Bases Vert. C.

Existen tres bases que describen el punto C:

$$B = \{1, 3, 2\}$$
$$B = \{1, 3, 4\}$$
$$B = \{1, 3, 5\}$$

Movernos de un vértice a otro

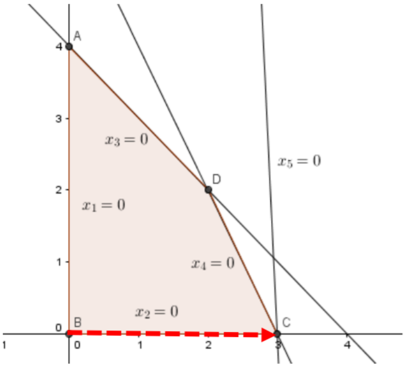


Figure: Movimiento

Supongamos que pasamos desde el origen al punto C en la primera iteración

Luego, para este movimiento las bases que podrían resultar son:

$$B = \{1, 3, 4\}$$
$$B = \{1, 3, 5\}$$

Para resolverlo debemos elegir una base y comenzar a iterar.

Método iterativo

1. **Verificación:**
Se debe verificar que el problema de programación lineal entregado sea de forma estandar, tal como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & c^t x \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

De no ser el caso, se deben añadir variables de holgura en forma de suma o resta dependiendo del signo de la restricción, es decir:

- En el caso de que la restricción sea $\leq$ se debe sumar una variable x_i para poder activar la restricción, se debe pensar como: *Cuanto se le debe añadir a la restricción para poder activarla, es decir igualarse*
- En el caso de que la restricción sea $\geq$ se debe restar una variable x_i para poder activar la restricción, se debe pensar como: *Cuanto se le debe restar a la restricción para poder activarla, es decir igualarse*

Método iterativo

2. **Inicialización:**
   Encontrar una base factible B, cuyas columnas denotaremos por $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$.
   Definir índices básicos y no básicos:
   $\mathcal{B} := \{B(1), \ldots, B(m)\}, \quad \mathcal{N} := \{1, \ldots, n\} \backslash \mathcal{B}$.
   Calcular $B^{-1}, \quad x_B := B^{-1}b, \quad z := c_B^t x_B$
3. **Test de optimalidad - Criterio de Entrada:**
   Calcular los multiplicadores símplex: $p^t := c_B^t B^{-1}$.
   Calcular los costos reducidos: $\bar{c}_j := c_j - p^t A_j \forall j \in \mathcal{N}$.
   Si$\forall j \in \mathcal{N}, \bar{c}_j \geq 0$, terminar (estamos en el óptimo).
   Si no, sea $j \in \mathcal{N}$ tal que $\bar{c}_j < 0$

Método iterativo

4. **Test de factibilidad - Criterio de Salida:**
   Calcular $u := B^{-1}A_j$.
   Calcular $\mathcal{I} := \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid u_i > 0\}$.
   Si $\mathcal{I} = \emptyset$, terminar (el problema es no acotado).
   Si no, calcular $\theta^* := \min_{i \in \mathcal{I}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}$ y $\ell \in \mathcal{I}$ tal que $\theta^* = \frac{x_{B(\ell)}}{u_\ell}$.
5. **Actualizar:**
   Formar una nueva base B reemplazando $A_{B(\ell)}$ por A_j en la base anterior.
   $\mathcal{B} := \mathcal{B} \backslash \{B(\ell)\} \cup \{j\}, \quad \mathcal{N} := \mathcal{N} \backslash \{j\} \cup \{B(\ell)\}$
   Decimos que x_j entra a la base y $x_{B(\ell)}$ sale de ella.
   $x_j := \theta^*, \quad x_{B(i)} := x_{B(i)} - \theta^* u_i$ para $i \neq \ell$
   $z := z + \theta^* \bar{c}_j$.
   Calcular $B^{-1}(*)$. Ir a 2 .

Table of Contents

Simplex

Resuelva el siguiente problema de optimización mediante el algoritmo Simplex.

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 - x_3 \\ \text{s.a.} & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Simplex

Tenemos el siguiente problema de optimización que deseamos resolver.

$$
\begin{array}{rl}
\min & 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.} & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\
 & 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 5 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Simplex

Tenemos el siguiente problema de optimización que deseamos resolver.

$$
\begin{array}{rl}
\min & 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.} & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\
 & 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 5 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

1. Verificación: Vemos que el problema entregado no corresponde a la formulación estándar, por lo que añadimos variables de holgura para activar las restricciones, tal como se muestra a continuación.

Simplex

Tenemos el siguiente problema de optimización que deseamos resolver.

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.} & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\
& 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

1. Verificación: Vemos que el problema entregado no corresponde a la formulación estándar, por lo que añadimos variables de holgura para activar las restricciones, tal como se muestra a continuación.

$$\min \quad 2x_2 - x_3$$

Simplex

Tenemos el siguiente problema de optimización que deseamos resolver.

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.} & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\
 & 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 5 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

1. Verificación: Vemos que el problema entregado no corresponde a la formulación estándar, por lo que añadimos variables de holgura para activar las restricciones, tal como se muestra a continuación.

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & 2x_2 - x_3 \\
s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4
\end{array}
$$

Simplex

Tenemos el siguiente problema de optimización que deseamos resolver.

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.} & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\
& 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

1. Verificación: Vemos que el problema entregado no corresponde a la formulación estándar, por lo que añadimos variables de holgura para activar las restricciones, tal como se muestra a continuación.

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_2 - x_3 \\
s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9
\end{array}
$$

Simplex

Tenemos el siguiente problema de optimización que deseamos resolver.

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.} & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\
& 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

1. Verificación: Vemos que el problema entregado no corresponde a la formulación estándar, por lo que añadimos variables de holgura para activar las restricciones, tal como se muestra a continuación.

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_2 - x_3 \\
s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9 \\
& 2x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_6 = 5
\end{array}
$$

Simplex

Tenemos el siguiente problema de optimización que deseamos resolver.

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.} & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\
& 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

1. Verificación: Vemos que el problema entregado no corresponde a la formulación estándar, por lo que añadimos variables de holgura para activar las restricciones, tal como se muestra a continuación.

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_2 - x_3 \\
s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9 \\
& 2x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_6 = 5 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

Simplex

2. Inicialización: De la Matriz de restricciones escogemos A_4, A_5, A_6 que son l.i.:

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_2 - x_3 \\
s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9 \\
 & 2x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_6 = 5 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

Como se ve la matriz de reestricciones

Simplex

2. Inicialización: De la Matriz de restricciones escogemos A_4, A_5, A_6 que son l.i.:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 - x_3 \\ s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_6 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Como se ve la matriz de reestricciones

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Simplex

2. Inicialización: De la Matriz de restricciones escogemos A_4, A_5, A_6 que son l.i.:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 - x_3 \\ s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \quad\quad + x_6 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Como se ve la matriz de reestricciones

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos la matriz de las variables Basicas

Simplex

2. Inicialización: De la Matriz de restricciones escogemos A_4, A_5, A_6 que son l.i.:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 - x_3 \\ s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \quad\quad + x_6 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Como se ve la matriz de reestricciones

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos la matriz de las variables Basicas

$$B = B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Simplex

2. Inicialización: De la Matriz de restricciones escogemos A_4, A_5, A_6 que son l.i.:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 - x_3 \\ s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_6 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Como se ve la matriz de reestricciones

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos la matriz de las variables Basicas

$$B = B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Vemos la matriz de las variables n0 básicas

Simplex

2. Inicialización: De la Matriz de restricciones escogemos A_4, A_5, A_6 que son l.i.:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 - x_3 \\ s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_6 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Como se ve la matriz de reestricciones

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos la matriz de las variables Basicas

$$B = B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Vemos la matriz de las variables n0 básicas

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Simplex

Debemos encontrar la solución básica factible asociada a la base, la cual esta dada por

$$x_B = B^{-1} \cdot b$$

Simplex

Debemos encontrar la solución básica factible asociada a la base, la cual esta dada por

$$x_B = B^{-1} \cdot b$$

Recordar el problema de programación lineal al cual nos enfrentamos:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 - x_3 \\ s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \quad\quad + x_6 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Simplex

Debemos encontrar la solución básica factible asociada a la base, la cual esta dada por

$$x_B = B^{-1} \cdot b$$

Recordar el problema de programación lineal al cual nos enfrentamos:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 - x_3 \\ s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_6 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Anteriormente definimos B^{-1} y sabemos que el vector b corresponde a:

Simplex

Debemos encontrar la solución básica factible asociada a la base, la cual esta dada por

$$x_B = B^{-1} \cdot b$$

Recordar el problema de programación lineal al cual nos enfrentamos:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 - x_3 \\ s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_6 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Anteriormente definimos B^{-1} y sabemos que el vector b corresponde a:

$$B = B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Simplex

Podemos encontrar la solución básica factible dada por:

$$x_B = B^{-1} \cdot b$$

Simplex

Podemos encontrar la solución básica factible dada por:

$$x_B = B^{-1} \cdot b$$

$$x_B =$$

Simplex

Podemos encontrar la solución básica factible dada por:

$$x_B = B^{-1} \cdot b$$

$$x_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Simplex

Podemos encontrar la solución básica factible dada por:

$$x_B = B^{-1} \cdot b$$

$$x_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Simplex

3. Test de Optimalidad - Criterio de Entrada:
   - Procedemos a calcular los costos reducidos mediante la siguiente expresión: $\bar{c}_j = c_j - c'_B B^{-1} A_j$,recordando que nuestras variables basicas corresponden a: $B = \{x_4, x_5, x_6\}$

Simplex

3. Test de Optimalidad - Criterio de Entrada:
   - Procedemos a calcular los costos reducidos mediante la siguiente expresión: $\bar{c}_j = c_j - c'_B B^{-1} A_j$,recordando que nuestras variables basicas corresponden a: $B = \{x_4, x_5, x_6\}$

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_2 - x_3 \\
s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9 \\
& 2x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_6 = 5 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

Simplex

3. Test de Optimalidad - Criterio de Entrada:
   - Procedemos a calcular los costos reducidos mediante la siguiente expresión: $\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A_j$,recordando que nuestras variables basicas corresponden a: $B = \{x_4, x_5, x_6\}$

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 - x_3 \\ s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_6 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \bar{c}_1 = 0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} A_1 = 0$$

Simplex

3. Test de Optimalidad - Criterio de Entrada:
   - Procedemos a calcular los costos reducidos mediante la siguiente expresión: $\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A_j$,recordando que nuestras variables basicas corresponden a: $B = \{x_4, x_5, x_6\}$

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 - x_3 \\ s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \quad\quad + x_6 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \bar{c}_1 = 0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} A_1 = 0$$
$$\Rightarrow \bar{c}_2 = 2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} A_2 = 2$$

Simplex

3. Test de Optimalidad - Criterio de Entrada:
   - Procedemos a calcular los costos reducidos mediante la siguiente expresión: $\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A_j$,recordando que nuestras variables basicas corresponden a: $B = \{x_4, x_5, x_6\}$

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_2 - x_3 \\
s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9 \\
& 2x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_6 = 5 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\Rightarrow \bar{c}_1 = 0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} A_1 = 0 \\
\Rightarrow \bar{c}_2 = 2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} A_2 = 2 \\
\Rightarrow \bar{c}_3 = -1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} A_3 = -1
\end{array}
$$

Simplex

3. Test de Optimalidad - Criterio de Entrada:
   - Procedemos a calcular los costos reducidos mediante la siguiente expresión: $\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A_j$,recordando que nuestras variables basicas corresponden a: $B = \{x_4, x_5, x_6\}$

$$\begin{array}{ll}
\min & 2x_2 - x_3 \\
s.a. & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 9 \\
 & 2x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_6 = 5 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow \bar{c}_1 = 0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} A_1 = 0$$
$$\Rightarrow \bar{c}_2 = 2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} A_2 = 2$$
$$\Rightarrow \bar{c}_3 = -1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} A_3 = -1$$

Obs: $c_B = 0$. Como hay un costo reducido negativo, no estamos en un óptimo. Luego, entra la tercera columna a la base.

Importante Consto Reducido

Notar que la existencia de costos reducidos ≤ 0 nos dice que se puede aumentar el valor de una variable no básica (de modo que pasa a básica), disminuyendo el valor de la función objetivo. Esta disminución será de $\bar{c}_i$ por cada unidad que aumentemos de la variable x_i. De este modo, podemos elegir cualquier variable x_i para que entre a la base, siempre y cuando cumpla que $\bar{c}_i \leq 0$. Por convención se escoge la que sea mas negativa porque intuitivamente mejora mas rápido la función objetivo.

Importante Consto Reducido

Notar que la existencia de costos reducidos ≤ 0 nos dice que se puede aumentar el valor de una variable no básica (de modo que pasa a básica), disminuyendo el valor de la función objetivo. Esta disminución será de $\bar{c}_i$ por cada unidad que aumentemos de la variable x_i. De este modo, podemos elegir cualquier variable x_i para que entre a la base, siempre y cuando cumpla que $\bar{c}_i \leq 0$. Por convención se escoge la que sea mas negativa porque intuitivamente mejora mas rápido la función objetivo.

Recordando en la slide anterior:
$\Rightarrow \bar{c}_3 = -1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} A_3 = -1$

Se aplica el criterio de entrada: entra variable con costo reducido negativo Entra x_3 a la base

Simplex

4. Test de Factibilidad - Criterio de Salida
   - Luego, calculamos la dirección de descenso dada por la matriz básica y la columna de la matriz de restricciones con costo negativo:

Simplex

4. Test de Factibilidad - Criterio de Salida
   - Luego, calculamos la dirección de descenso dada por la matriz básica y la columna de la matriz de restricciones con costo negativo:

$$-d_B$$

Simplex

4. Test de Factibilidad - Criterio de Salida
   - Luego, calculamos la dirección de descenso dada por la matriz básica y la columna de la matriz de restricciones con costo negativo:

$$-d_B = u =$$

Simplex

4. Test de Factibilidad - Criterio de Salida
   - Luego, calculamos la dirección de descenso dada por la matriz básica y la columna de la matriz de restricciones con costo negativo:

$$-d_B = u = B^{-1}$$

Simplex

4. Test de Factibilidad - Criterio de Salida
   - Luego, calculamos la dirección de descenso dada por la matriz básica y la columna de la matriz de restricciones con costo negativo:

$$-d_B = u = B^{-1}A_3$$

Simplex

4. Test de Factibilidad - Criterio de Salida
   - Luego, calculamos la dirección de descenso dada por la matriz básica y la columna de la matriz de restricciones con costo negativo:

$$-d_B = u = B^{-1}A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Simplex

4. Test de Factibilidad - Criterio de Salida
   - Luego, calculamos la dirección de descenso dada por la matriz básica y la columna de la matriz de restricciones con costo negativo:

$$-d_B = u = B^{-1}A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Simplex

4. Test de Factibilidad - Criterio de Salida
   - Luego, calculamos la dirección de descenso dada por la matriz básica y la columna de la matriz de restricciones con costo negativo:

$$-d_B = u = B^{-1}A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Simplex

4. Test de Factibilidad - Criterio de Salida

Solo se consideran las componentes de u que son positivas (**si es que no hubiese el costo es no acotado, es decir $-\infty$**) y se calcula el $\min_{u_i>0}\left\{\frac{x_{B_i}}{u_i}\right\}$.

Simplex

4. Test de Factibilidad - Criterio de Salida

Solo se consideran las componentes de u que son positivas (**si es que no hubiese el costo es no acotado, es decir $-\infty$**) y se calcula el $\min_{u_i>0}\left\{\frac{x_{B_i}}{u_i}\right\}$.
Recordando el valor de x_B y las variables básicas dadas por $B = \{x_4, x_5, x_6\}$

$$x_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Simplex

4. Test de Factibilidad - Criterio de Salida

Solo se consideran las componentes de u que son positivas (**si es que no hubiese el costo es no acotado, es decir $-\infty$**) y se calcula el $\min_{u_i>0}\left\{\frac{x_{B_i}}{u_i}\right\}$.
Recordando el valor de x_B y las variables básicas dadas por $B = \{x_4, x_5, x_6\}$

$$x_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

De esta forma el $\min_{u_i>0}\left\{\frac{x_{B_i}}{u_i}\right\}$ corresponde a:

Simplex

4. Test de Factibilidad - Criterio de Salida

Solo se consideran las componentes de u que son positivas (**si es que no hubiese el costo es no acotado, es decir** $-\infty$) y se calcula el $\min_{u_i>0}\left\{\frac{x_{B_i}}{u_i}\right\}$.
Recordando el valor de x_B y las variables básicas dadas por $B=\{x_4,x_5,x_6\}$

$$x_B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\ 9\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 9\\ 5\end{pmatrix}$$

De esta forma el $\min_{u_i>0}\left\{\frac{x_{B_i}}{u_i}\right\}$ corresponde a:

$$\frac{x_{B_2}}{u_5}=\frac{9}{1}=9$$

Simplex

4. Test de Factibilidad - Criterio de Salida

    - Base $B = \{x_4, x_5, x_6\}$
    - **Criterio de salida:** Seleccionamos la variable básica que primero tome el valor cero al hacer crecer la variable entrante. En caso de empate, tomaremos la de menor sub índice.

Simplex

4. Test de Factibilidad - Criterio de Salida

   - Base $B = \{x_4, x_5, x_6\}$
   - **Criterio de salida:** Seleccionamos la variable básica que primero tome el valor cero al hacer crecer la variable entrante. En caso de empate, tomaremos la de menor sub índice. $\min_{u_i>0} \left\{ \frac{x_{B_i}}{u_i} \right\}$ corresponde a:

Simplex

4. Test de Factibilidad - Criterio de Salida

- Base $B = \{x_4, x_5, x_6\}$
- **Criterio de salida:** Seleccionamos la variable básica que primero tome el valor cero al hacer crecer la variable entrante. En caso de empate, tomaremos la de menor sub índice. $\min_{u_i > 0} \left\{ \frac{x_{B_i}}{u_i} \right\}$ corresponde a:

$$\frac{x_{B_2}}{u_5} = \frac{9}{1} = 9$$

Sale x_5

Simplex

4. Test de Factibilidad - Criterio de Salida

- Base $B = \{x_4, x_5, x_6\}$
- **Criterio de salida:** Seleccionamos la variable básica que primero tome el valor cero al hacer crecer la variable entrante. En caso de empate, tomaremos la de menor sub índice. $\min_{u_i > 0} \left\{ \frac{x_{B_i}}{u_i} \right\}$ corresponde a:

$$\frac{x_{B_2}}{u_5} = \frac{9}{1} = 9$$

Sale x_5

- Criterio de entrada: Entra x_3 , Criterio de Salida: x_5

Simplex

5. Actualizar.
   - Luego x_5 abandona la base y es reemplazada por x_3. La solución básica factible asociada a la base es $B = \{x_4, x_5, x_6\}$: **Entra en el mismo lugar en el cual sale la otra variable! No sea pavaroti, sea vivaldi**

Simplex

5. Actualizar.
   - Luego x_5 abandona la base y es reemplazada por x_3. La solución básica factible asociada a la base es $B = \{x_4, x_5, x_6\}$: **Entra en el mismo lugar en el cual sale la otra variable! No sea pavaroti, sea vivaldi**

$$x_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Simplex

5. Actualizar.
   - Luego x_5 abandona la base y es reemplazada por x_3. La solución básica factible asociada a la base es $B = \{x_4, x_5, x_6\}$:
     Entra en el mismo lugar en el cual sale la otra variable!
     No sea pavaroti, sea vivaldi

$$x_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Simplex

5. Actualizar.
   - Luego x_5 abandona la base y es reemplazada por x_3. La solución básica factible asociada a la base es $B = \{x_4, x_5, x_6\}$: **Entra en el mismo lugar en el cual sale la otra variable! No sea pavaroti, sea vivaldi**

$$x_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Simplex

5. Actualizar.
   - Luego x_5 abandona la base y es reemplazada por x_3. La solución básica factible asociada a la base es $B = \{x_4, x_5, x_6\}$: **Entra en el mismo lugar en el cual sale la otra variable! No sea pavaroti, sea vivaldi**

$$x_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \\ 13 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Simplex

5. Actualizar.
   - Luego x_5 abandona la base y es reemplazada por x_3. La solución básica factible asociada a la base es $B = \{x_4, x_5, x_6\}$:
     Entra en el mismo lugar en el cual sale la otra variable!
     No sea pavaroti, sea vivaldi

$$x_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \\ 13 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Cuyo valor óptimo es $z = -9$.

Simplex

5. Actualizar - Volvemos al paso 2

Simplex

5. Actualizar - Volvemos al paso 2
   Esto no acaba aquí !

   Volver al paso 2., revisamos que los costos reducidos sean todos mayores o iguales a cero.!! Propuesto para que suelten la mano.

Simplex

5. Actualizar - Volvemos al paso 2
   Esto no acaba aquí !

Volver al paso 2., revisamos que los costos reducidos sean todos mayores o iguales a cero.!! Propuesto para que suelten la mano.

Respuesta: Si verificamos que los costos reducidos son todos mayores e iguales a cero, abaremos llegado al óptimo por medio del método Simplex, es decir una solución básica factible que minimiza la función objetivo y esta corresponde a:

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \\ 13 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Cuyo valor óptimo es $z = -9$.

Table of Contents

Pregunta 2

Dado el programa lineal a continuación, considere la solución $x = (0, 0, 15, 36, 200)$.

$$\begin{array}{lllllll}
\min & -12x_1 & -7x_2 & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 15 \\
& 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & & = & 35 \\
& 2x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 200 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

1. Encuentre una base B tal que $x = (x_B, x_N)$. ¿Cuáles son las variables básicas de x y las variables no-básicas de x? Escriba todas las direcciones basicas correspondientes a las variables non-basicas.
2. Calcule los costos reducidos $\bar{c}$ que corresponden al punto x con su base B.
3. Seleccione una dirección básica d^j tal que $\bar{c}_j < 0$. Encuentre el punto $x' := x + \theta^* d^j$ tal que $\theta^* \geq 0$ es el máximo valor $\theta \geq 0$ tal que $x + \theta d^j$ es factible. Identifique una base B' por x' y demuestre que de verdad B' es una base para x'. Para eso pueden usar las identidades en el enunciado:

Pregunta 2 - Parte 1

Dado el programa lineal a continuación, considere la solución $x = (0, 0, 15, 36, 200)$.

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & -12x_1 & -7x_2 & & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 15 \\
 & 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & & = & 36 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 200 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

1. Encuentre una base B tal que $x = (x_B, x_N)$. ¿Cuáles son las variables básicas de x y las variables no-básicas de x? Escriba todas las direcciones basicas correspondientes a las variables non-basicas.

Pregunta 2 - Parte 1

Dado el programa lineal a continuación, considere la solución $x = (0, 0, 15, 36, 200)$.

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & -12x_1 & -7x_2 & & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 15 \\
 & 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & & = & 36 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 200 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

1. Encuentre una base B tal que $x = (x_B, x_N)$. ¿Cuáles son las variables básicas de x y las variables no-básicas de x? Escriba todas las direcciones basicas correspondientes a las variables non-basicas.

La base $B = \{3, 4, 5\}$ y $N = \{1, 2\}$, por lo que las variables básicas son $x_B = (x_3, x_4, x_5) = (15, 36, 200)$y las variables no básicas son $x_N = (x_1, x_2) = (0, 0)$.

Pregunta 2 - Parte 1

La matriz básica asociada a esta solución es la matriz identidad.

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Las direcciones básicas factibles de las variables no básicas son:

$$d_B = -A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -6 & -9 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2 - Parte 2

Dado el programa lineal a continuación, considere la solución $x = (0, 0, 15, 36, 200)$.

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & -12x_1 & -7x_2 & & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 15 \\
 & 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & & = & 36 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 200 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

2. Calcule los costos reducidos $\bar{c}$ que corresponden al punto x con su base B.

Pregunta 2 - Parte 2

Dado el programa lineal a continuación, considere la solución $x = (0, 0, 15, 36, 200)$.

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & -12x_1 & -7x_2 & & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 15 \\
& 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & & = & 36 \\
& 2x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 200 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

2. Calcule los costos reducidos $\bar{c}$ que corresponden al punto x con su base B.

Los costos reducidos son:

Pregunta 2 - Parte 2

Dado el programa lineal a continuación, considere la solución $x = (0, 0, 15, 36, 200)$.

$$
\begin{array}{lllllllll}
\text{min} & -12x_1 & -7x_2 & & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 15 \\
 & 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & & = & 36 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 200 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

2. Calcule los costos reducidos $\bar{c}$ que corresponden al punto x con su base B.

Los costos reducidos son:

$$\bar{c}_N = c_N - c_B A_B^{-1} A_N$$

Pregunta 2 - Parte 2

Dado el programa lineal a continuación, considere la solución $x = (0, 0, 15, 36, 200)$.

$$\begin{array}{llllllll}
\min & -12x_1 & -7x_2 & & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 15 \\
& 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & & = & 36 \\
& 2x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 200 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

2. Calcule los costos reducidos $\bar{c}$ que corresponden al punto x con su base B.

Los costos reducidos son:

$$\bar{c}_N = c_N - c_B A_B^{-1} A_N$$

$$= \begin{pmatrix} -12 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_B^{-1} A_N$$

Pregunta 2 - Parte 2

Dado el programa lineal a continuación, considere la solución $x = (0, 0, 15, 36, 200)$.

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & -12x_1 & -7x_2 & & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 15 \\
 & 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & & = & 36 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 200 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

2. Calcule los costos reducidos $\bar{c}$ que corresponden al punto x con su base B.

Los costos reducidos son:

$$\bar{c}_N = c_N - c_B A_B^{-1} A_N$$

$$= \begin{pmatrix} -12 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_B^{-1} A_N$$

$$= \begin{pmatrix} -12 & -7 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2 - Parte 3

Dado el programa lineal a continuación, considere la solución $x = (0, 0, 15, 36, 200)$.

$$\begin{array}{lllllllll}
\min & -12x_1 & -7x_2 & & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 15 \\
 & 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & & = & 36 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 200 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

3. Seleccione una dirección básica d^j tal que $\bar{c}_j < 0$. Encuentre el punto $x' := x + \theta^* d^j$ tal que $\theta^* \geq 0$ es el máximo valor $\theta \geq 0$ tal que $x + \theta d^j$ es factible. Identifique una base B' por x' y demuestre que de verdad B' es una base para x'.

Pregunta 2 - Parte 3

Dado el programa lineal a continuación, considere la solución $x = (0, 0, 15, 36, 200)$.

$$
\begin{array}{lllllll}
\min & -12x_1 & -7x_2 & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 15 \\
 & 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & & = & 36 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 200 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

3. Seleccione una dirección básica d^j tal que $\bar{c}_j < 0$. Encuentre el punto $x' := x + \theta^* d^j$ tal que $\theta^* \geq 0$ es el máximo valor $\theta \geq 0$ tal que $x + \theta d^j$ es factible. Identifique una base B' por x' y demuestre que de verdad B' es una base para x'.

   La dirección básica d^j escogida es la asociada a la variable x_2, por lo tanto, utilizando la ecuación $d_B^j := -A_B^{-1} A_j$. Tenemos que:

Pregunta 2 - Parte 3

Dado el programa lineal a continuación, considere la solución $x = (0, 0, 15, 36, 200)$.

$$\begin{array}{llllllll}
\min & -12x_1 & -7x_2 & & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 15 \\
 & 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & & = & 36 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 200 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

3. Seleccione una dirección básica d^j tal que $\bar{c}_j < 0$. Encuentre el punto $x' := x + \theta^* d^j$ tal que $\theta^* \geq 0$ es el máximo valor $\theta \geq 0$ tal que $x + \theta d^j$ es factible. Identifique una base B' por x' y demuestre que de verdad B' es una base para x'.

   La dirección básica d^j escogida es la asociada a la variable x_2, por lo tanto, utilizando la ecuación $d_B^j := -A_B^{-1} A_j$. Tenemos que:

$$d_B^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix} d_N^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \textit{finalmente}$$

Pregunta 2 - Parte 3

Dado el programa lineal a continuación, considere la solución $x = (0, 0, 15, 36, 200)$.

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{min} & -12x_1 & -7x_2 & & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 15 \\
 & 6x_1 & +9x_2 & & +x_4 & & = & 36 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 200 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

3. Seleccione una dirección básica d^j tal que $\bar{c}_j < 0$. Encuentre el punto $x' := x + \theta^* d^j$ tal que $\theta^* \geq 0$ es el máximo valor $\theta \geq 0$ tal que $x + \theta d^j$ es factible. Identifique una base B' por x' y demuestre que de verdad B' es una base para x'.

   La dirección básica d^j escogida es la asociada a la variable x_2, por lo tanto, utilizando la ecuación $d^j_B := -A_B^{-1} A_j$. Tenemos que:

$$
d^2_B = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix} d^2_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \textit{finalmente} \quad d^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}
$$

Pregunta 2 - Parte 3

La dirección básica d^j escogida es la asociada a la variable x_2, por lo tanto:

$$d_B^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix} d_N^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando esta dirección se obtiene θ^* :

Pregunta 2 - Parte 3

La dirección básica d^j escogida es la asociada a la variable x_2, por lo tanto:

$$d_B^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix} d_N^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando esta dirección se obtiene θ^* :

$$\theta^* = \min_{d_{B_i}<0} \left\{ \frac{-x_3}{d_{B_3}}, \frac{-x_4}{d_{B_4}}, \frac{-x_5}{d_{B_5}} \right\} = \min_{d_{B_i}<0} \left\{ \frac{-15}{-2}, \frac{-36}{-9}, \frac{-200}{-2} \right\}$$

$$\theta^* = 4$$

Pregunta 2 - Parte 3

La dirección básica d^j escogida es la asociada a la variable x_2, por lo tanto:

$$d_B^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix} d_N^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando esta dirección se obtiene θ^* :

$$\theta^* = \min_{d_{B_i}<0} \left\{ \frac{-x_3}{d_{B_3}}, \frac{-x_4}{d_{B_4}}, \frac{-x_5}{d_{B_5}} \right\} = \min_{d_{B_i}<0} \left\{ \frac{-15}{-2}, \frac{-36}{-9}, \frac{-200}{-2} \right\}$$

$$\theta^* = 4$$

Finalmente, se encuentra el punto x', al cual nos movemos con la dirección escogida, considerando $x = (0, 0, 15, 36, 200)$, $\theta^* = 4$ y d^j anterior :

Pregunta 2 - Parte 3

La dirección básica d^j escogida es la asociada a la variable x_2, por lo tanto:

$$d_B^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix} d_N^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando esta dirección se obtiene θ^* :

$$\theta^* = \min_{d_{B_i}<0} \left\{ \frac{-x_3}{d_{B_3}}, \frac{-x_4}{d_{B_4}}, \frac{-x_5}{d_{B_5}} \right\} = \min_{d_{B_i}<0} \left\{ \frac{-15}{-2}, \frac{-36}{-9}, \frac{-200}{-2} \right\}$$
$$\theta^* = 4$$

Finalmente, se encuentra el punto x', al cual nos movemos con la dirección escogida, considerando $x = (0, 0, 15, 36, 200)$, $\theta^* = 4$ y d^j anterior :

$$x' = x + \theta^* d^j = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & 0 & 192 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2 - Parte 3

La base asociada a x' es $B' = \{2, 3, 5\}$ y su matriz básica es:

Pregunta 2 - Parte 3

La base asociada a x' es $B' = \{2, 3, 5\}$ y su matriz básica es:

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2 - Parte 3

La base asociada a x' es $B' = \{2, 3, 5\}$ y su matriz básica es:

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para demostrar que la base anterior es base para x' calculamos x'_B utilizando la base:

Pregunta 2 - Parte 3

La base asociada a x' es $B' = \{2, 3, 5\}$ y su matriz básica es:

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para demostrar que la base anterior es base para x' calculamos x'_B utilizando la base:

$$x'_B =$$

Pregunta 2 - Parte 3

La base asociada a x' es $B' = \{2,3,5\}$ y su matriz básica es:

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para demostrar que la base anterior es base para x' calculamos x'_B utilizando la base:

$$x'_B = A_B^{-1} b =$$

Pregunta 2 - Parte 3

La base asociada a x' es $B' = \{2, 3, 5\}$ y su matriz básica es:

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para demostrar que la base anterior es base para x' calculamos x'_B utilizando la base:

$$x'_B = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 36 \\ 200 \end{pmatrix} =$$

Pregunta 2 - Parte 3

La base asociada a x' es $B' = \{2, 3, 5\}$ y su matriz básica es:

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para demostrar que la base anterior es base para x' calculamos x'_B utilizando la base:

$$x'_B = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 36 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 192 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2 - Parte 3

La base asociada a x' es $B' = \{2, 3, 5\}$ y su matriz básica es:

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para demostrar que la base anterior es base para x' calculamos x'_B utilizando la base:

$$x'_B = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 36 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 192 \end{pmatrix}$$

Hemos llegado a una verdad por lo que si es base.

Pregunta 2 - Parte 4

4. Argumente si se puede concluir que la solución encontrada en 3. correspondiente a x' es óptima.
   La solución factible encontrada corresponde a:

$$x'_B = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 36 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 192 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2 - Parte 4

4. Argumente si se puede concluir que la solución encontrada en 3. correspondiente a x' es óptima.
   La solución factible encontrada corresponde a:

$$x'_B = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 36 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 192 \end{pmatrix}$$

   Para argumentar si x' calculamos sus costos reducidos.

Pregunta 2 - Parte 4

4. Argumente si se puede concluir que la solución encontrada en 3. correspondiente a x' es óptima.
La solución factible encontrada corresponde a:

$$x'_B = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 36 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 192 \end{pmatrix}$$

Para argumentar si x' calculamos sus costos reducidos.

$$\bar{c}_N = c_N - c_B A_B^{-1} A_N$$
$$= \begin{pmatrix} -12 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\bar{c}_N = \begin{pmatrix} -12 & 0 \end{pmatrix} - (-\tfrac{14}{3} - \tfrac{7}{9}) = \begin{pmatrix} -\frac{22}{3} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

Pregunta 2 - Parte 4

El punto x' no es óptimo, pues existe un costo reducido negativo. Es decir, se puede aumentar el valor de una variable no básica (de modo que pasa a básica), disminuyendo el valor de la función objetivo. Esta disminución será de $\bar{c}_i$ por cada unidad que aumentemos de la variable x_i.

Despedida

Dudas o consultas al :

marianaquirogagarcia@hotmail.com
sofia.montano@ug.uchile.cl