

IN3701 - Modelamiento y Optimización

Auxiliar N° 3 - TSP

Profesores: Rafael Epstein, Andreas Wiese

Auxiliares: Jose Miguel Gonzalez, Daniel Iriarte, Cristián Lira, Paz Montaña, David Palacios, Mariana Quiroga.

P1. TSP - Problema del vendedor viajero

Considere a un vendedor de Pinder que debe pasar por las N casas de su provincia vendiendo los productos comestibles de Snnop Dog. Este vendedor debe pasar por cada casa una sola vez para no saturar al público objetivo. Cabe destacar que la distancia entre la casa i y la casa j es d_{ij} . Modele este problema de programación lineal clásico de modo de minimizar las distancias logrando que el vendedor regrese a su casa luego de recorrer toda la provincia.

Pauta P1.

- Variables de decisión:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{Si utilizo arista (i,j)} \\ 0, & \sim \end{cases} \quad \forall i \in N, j \in N$$

- Función Objetivos:

$$\min \sum_{i,j \in N} d_{ij} x_{i,j}$$

- Restricciones - S.A.:

- Solo pasar una vez por cada casa

$$\sum_{i \in N} x_{i,j} = 1 \quad \forall j \in N$$

- Restricción de Flujo

$$\sum_{j \in N} x_{i,j} - \sum_{j \in N} x_{j,i} = 0 \quad \forall i \in N$$

- Eliminación de Subtours

$$\sum_{\{(i,j) \in A \mid i \in S, j \notin S\}} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subseteq N : \emptyset \subsetneq S \subsetneq N$$

- Naturaleza de variables

$$x_i \in \{0, 1\}$$

P2. TSP - Otra formulación.

Las observaciones que realiza un telescopio son seleccionadas de diversos estudios propuestos al telescopio. Cada propuesta de observación tiene una prioridad p_i (que refleja la calidad de la propuesta de investigación y el tiempo que ha esperado la propuesta) y demora un tiempo t_i en ajustar los distintos sensores y realizar la observación. Cada propuesta de observación se realiza a lo más una vez. Sea d_{ij} el tiempo que se demora posicionar el telescopio para realizar la observación j después de la observación i (el tiempo es d_{0j} si j es la primera observación).

(a). Escriba un problema de optimización que maximice la prioridad de las observaciones realizadas en un plazo de tiempo T de un conjunto de observaciones I .

(b). Considere ahora que se planifica la observación durante K días. Dado que lo que es visible en el cielo cambia cada día suponga ahora que el tiempo disponible para observaciones en el día k es T_k y que la prioridad p_{ik} refleja que tan bien se puede realizar la observación i en el día k . Modifique el problema de la parte (a) para considerar estos cambios.

Pauta P2

(a) Se considera el punto 0 como el punto de partida, por lo que se tiene:

$$\hat{I} = I \cup \{0\}$$

Variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{Si observo la propuesta } i \\ 0, & \sim \end{cases} \quad \forall i \in \hat{I}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Si observo la } j \text{ inmediatamente después de observar } i \\ 0, & \sim \end{cases} \quad \forall i \in \hat{I}, \forall j \in \hat{I}$$

• Función objetivo:

$$\max \sum_{i \in I} x_i \cdot p_i$$

• Restricciones:

i. Relación entre variables

$$y_{ij} \leq x_i \quad \forall i \in \hat{I}, j \in \hat{I} \quad \forall i \neq j$$

ii. Se debe respetar el máximo de tiempo T

$$\sum_{i \in I} x_i \cdot t_i + \sum_{i \in \hat{I}, j \in \hat{I}, i \neq j} y_{ij} \cdot d_{ij} \leq T$$

iii. Flujo de salida

$$\sum_{j \in I} y_{0j} = 1$$

iv. Flujo de entrada. Se puede considerar como $d_{i0} = 0 \quad \forall i \in I$, lo que le da consistencia al problema.

$$\sum_{i \in I} y_{i0} = 1$$

v. Conservación de flujo

$$\sum_{i \in I} y_{ij} - \sum_{i \in I} y_{ji} = 0 \quad \forall j \in I$$

vi. Eliminación de los Sub Tours

$$\sum_{(i,j) \in S} y_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S, \emptyset \subset S \subset \{1, \dots, n\}$$

vii. Solo se observa cada propuesta a lo mas una vez

$$\sum_{i \in I} y_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in I$$

viii. Naturaleza de la variable:

$$\begin{aligned} x_i &\in \{0, 1\} \quad \forall i \in \hat{I} \\ y_{ij} &\in \{0, 1\} \quad \forall i \in \hat{I}, j \in \hat{I}, i \neq j \end{aligned}$$

(b) Se considera $\hat{K} = 1 \dots K$

Variables de decisión:

$$x_i^k = \begin{cases} 1, & \text{Si observo la propuesta } i \text{ en el día } k \\ 0, & \sim \end{cases} \quad \forall i \in \hat{I}, k \in \hat{K}$$

$$y_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{Si observo la prop. } j \text{ inmediatamente después de observar } i \text{ en el día } k \\ 0, & \sim \end{cases}$$

$$\forall i \in \hat{I}, \forall j \in \hat{I}, k \in \hat{K}$$

• Función objetivo:

$$\max \sum_{i \in I, k \in K} x_i^k \cdot p_i^k$$

• Restricciones:

i. Relación entre variables

$$y_{ij}^k \leq x_i^k \quad \forall i \in \hat{I}, j \in \hat{I}, k \in \hat{K} \quad \forall i \neq j$$

ii. Se debe respetar el máximo de tiempo T_k para un día específico

$$\sum_{i \in I} x_i^k \cdot t_i + \sum_{i \in \hat{I}, j \in \hat{I}, i \neq j} y_{ij}^k \cdot d_{ij} \leq T_k \quad \forall k \in \hat{K}$$

iii. Flujo de salida

$$\sum_{j \in I} y_{0j}^k = 1 \quad \forall k \in \hat{K}$$

iv. Flujo de entrada. Se puede considerar como $d_{i0} = 0 \quad \forall i \in I$, lo que le da consistencia al problema.

$$\sum_{i \in I} y_{i0}^k = 1 \quad \forall j \in \hat{K}$$

v. Conservación de flujo

$$\sum_{i \in I} y_{ij}^k - \sum_{i \in I} y_{ji}^k = 0 \quad \forall j \in I, k \in \hat{K}$$

vi. Eliminación de los Sub Tours

$$\sum_{(i,j) \in S} y_{ij}^k \leq |S| - 1 \quad \forall k \in K, \forall S, \emptyset \subset S \subset \{1, \dots, n\}$$

vii. Solo se observa cada propuesta a lo mas una vez

$$\sum_{j \in I, k \in \hat{K}} y_{ij}^k \leq 1 \quad \forall j \in I$$

viii. Naturaleza de la variable:

$$\begin{aligned} x_i^k &\in \{0, 1\} & \forall i \in \hat{I}, k \in \hat{K} \\ y_{ij}^k &\in \{0, 1\} & \forall i \in \hat{I}, j \in \hat{I}, i \neq j, k \in \hat{K} \end{aligned}$$

P3. Propuesto - Modelamiento

Usted es el gerente de una empresa Europea que vende muebles que son baratos pero también bonitos. Su meta es de entrar en el mercado Chileno. Para esto, quiere abrir sus primeras tiendas en Chile y quiere abrirlas en Santiago. Conoce los barrios B de Santiago. Para cada barrio $b \in B$ sabe una estimación de c_b CLP de cuanto dinero a la gente del barrio b le gustaría gastar en sus tiendas. Además hay un conjunto L de lugares posibles para abrir tiendas. Para cada lugar $\ell \in L$ hay un precio p_ℓ que tiene que pagar si abre una tienda en lugar ℓ . También, para cada pareja de un barrio $b \in B$ y un lugar $\ell \in L$ sabe la distancia $d_{b,\ell} > 0$ entre b y ℓ .

1. Escriba un programa lineal o un programa lineal entero que decida en que lugares abre una tienda. Tiene un presupuesto P para abrir las tiendas. La meta es de maximizar el numero de tiendas que abre.

2. Imagine que piensa mas sobre su visión de dar muebles fantásticos a la gente y que se le ocurre que seria mejor si la gente tuviera que caminar una distancia muy corta a sus tiendas. Por eso, es necesario que cada barrio $b \in B$ sea asignado a una de las tiendas en un lugar ℓ tal que la distancia entre b y ℓ es a lo mas D , para un $D > 0$ dado. Cambie su modelo de la parte anterior.

3. Asuma ahora que para cada barrio $b \in B$ puede definir una tienda abierta en que la gente viviendo en b va a comprar. Si define que la gente de un barrio b compra en una tienda en un lugar ℓ es necesario que la distancia entre b y ℓ sea a lo mas D' , para un D' dado. Si no asigna una tienda a un barrio b , la gente en b no va a comprar. Hágalo tal que a cada tienda hay a lo mas 10 barrios asignados. La meta ahora es de maximizar el dinero total que la gente gasta en sus tiendas. Escriba un programa lineal o un programa lineal entero para esto.

4. Asuma ahora que automáticamente la gente de cada barrio $b \in B$ va a comprar en la tienda abierta mas cercana a b . Cambie su modelo de la parte anterior tal que para cada tienda abierta en un lugar ℓ , hay a lo mas 10 barrios b tal que la gente del barrio b va a comprar en la tienda en ℓ .

Pauta P3.

- (a) • Variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{Si abro la tienda } i \text{ en } L \\ 0, & \sim \end{cases} \quad \forall i \in L$$

- Función objetivo:

$$\max \sum_{i \in L} x_i$$

- Restricciones:

- i. Presupuesto

$$\sum_{i \in L} x_i \cdot p_i \leq P$$

- ii. Naturaleza de la variable:

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in L$$

- (b) • Agregamos la variable:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Si asigno barrio } j \text{ a tienda } i \\ 0, & \sim \end{cases} \quad \forall i \in L, \quad \forall j \in B$$

- Restricciones:

- i. Relación entre variables: sólo asigno si hay tienda

$$\sum_{j \in B} y_{ij} \leq M \cdot x_i \quad \forall i \in L, \quad \forall j \in B, \quad M \gg 1$$

- ii. Todo barrio es asignado a sólo una tienda

$$\sum_{i \in L} y_{i,j} = 1 \quad \forall j \in B$$

- iii. Radio límite de asignación

$$y_{i,j} \cdot d_{i,j} \leq D \quad \forall i \in L, \quad \forall j \in B$$

- iv. Naturaleza de la variable:

$$y_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in L, \quad \forall j \in B$$

(c) • Se añaden las restricciones:

- i. Asigno a lo más a 10 barrios:

$$\sum_{j \in B} y_{i,j} \leq x_i \cdot 10 \quad \forall i \in L$$

- ii. Radio límite de asignación:

$$y_{i,j} \cdot d_{i,j} \leq D' \quad \forall i \in L, \quad \forall j \in B$$

- La función objetivo cambia a:

$$\max \sum_{i \in L} \sum_{j \in B} y_{i,j} \cdot c_j$$

(d) • Se incluye la variable de decisión:

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{Si tienda } i \text{ es la más cercana a barrio } j \\ 0, & \sim \end{cases} \quad \forall i \in L, \quad \forall j \in B$$

- Restricción:

- i. Se transforma la restricción de radio límite de asignación a:

$$y_{i,j} \leq \alpha_{i,j} \quad \forall i \in L, \quad \forall j \in B$$

- La función objetivo se mantiene igual.