Departamento de Ingenierá Civil Industrial
IN3141 - Probabilidades
Profesores: Andrés Cristi, Charles Thraves
Auxiliares: N. Acevedo, J. Cisternas, G. Gattini, D. Kauer, P. Ubilla

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar #11

Esperanza y Varianza Condicional

Resumen

- **Probabilidad condicional:**
  - **Caso continuo:** Sea X e Y dos v.a's conjuntamente discretas, la función de densidad de X condicional a Y:
  $$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$
  - **Caso discreto:** Sea X e Y dos v.a's conjuntamente discretas, la PMF de X condicional a Y:
  $$p_{X|Y}(x \mid y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$$
- **Esperanza condicional:**
  - **Caso continuo:**
  $$E[X \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X|Y}(x \mid y) dx$$
  - **Caso discreto:**
  $$E[X \mid Y = y] = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_{X|Y}(x \mid y)$$
- **Ley de Esperanza Total:**
$$E[X] = E[E[X \mid Y]]$$
- **Varianza Condicional:**
$$\text{Var}[X \mid Y = y] = E\left[(X - E[X \mid Y = y])^2 \mid Y = y\right] \quad = E\left[X^2 \mid Y = y\right] - E[X \mid Y = y]^2$$
- **Ley de Varianza Total:**
$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X \mid Y)] + \text{Var}(E[X \mid Y])$$

Pregunta 1

Sean (X, Y) un vector aleatorio con rangos $R_X, R_Y = \{1, \ldots, N\}$ y con función de probabilidad conjunta

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{N(N+1)} & \text{, si } x \leq y \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre la forma de las v.a. $\mathbb{E}(X \mid Y)$ y también de $\mathbb{E}(Y \mid X)$ en función de X e Y. Además, calcule la esperanza de esta última ($\mathbb{E}(Y \mid X)$).

Pregunta 2

Jaduín tiene un emprendimiento de visitas turísiticas en el Parque Nacional de Conguillio. En el sur de Chile es muy común que llueva, esto ocurre cada día con probabilidad p independiente entre días. Si un día llueve Jaduín no realiza ningún tour y descansa ese día. Sea Y el número de días que Jaduín trabaja entre días de lluvia. Sea X el total de turistas que visitan el parque en este período de Y días. Condicional a los Y días, la distribución de X es:

$$(X \mid Y) \sim \text{Poisson}(\mu Y)$$

(a) Identifique la distribución de Y ¿A qué corresponden $\mathbb{E}(Y)$ y $\text{Var}(Y)$?

(b) Encuentre $E(X)$ y $Var(X)$