P1

jueves, 27 de mayo de 2021 15:15

## Pregunta 1

Imagine que en un juego de dardos existe la misma probabilidad de acertar en cualquiera de los puntos de la circunferencia de radio $R$ (los dardos se lanzan de manera aleatoria y siempre caen dentro de la circunferencia). Sea $X$ la variable aleatoria que representa la distancia entre el centro de la circunferencia y el punto en que cae el dardo.

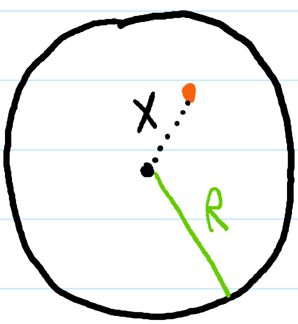
a) Calcule la probabilidad de que $X$ sea menor o igual a un radio $r \leq R$ arbitrario. Luego, determine la función densidad de probabilidad (PDF) de $X$.

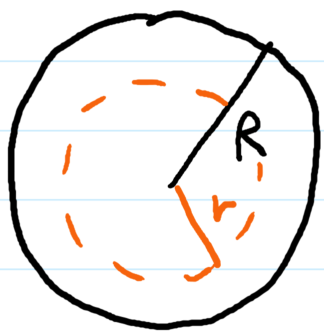
b) Calcule la esperanza de $X$. Luego, discuta si el resultado tiene sentido.

c) Sea $A(r)$ el área de una circunferencia de radio $r$. Calcule $\mathbb{E}(A(X))$ y $\mathbb{V}(A(X))$.

d) Utilice el TCV para obtener la función de densidad de $A(X)$.

a)




$$F_X(r) = P(X \leq r) = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$F_X(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

¿$f_X$?

$$f_X(r) = \frac{dF_X(r)}{dr} = \frac{2r}{R} \cdot \frac{1}{R} = \frac{2r}{R^2} \,//$$

b) $E(X) = \int^{R} r \cdot f_X(r)\, dr$

$0$

$$= \int_0^R \frac{2r^2}{R^2}\,dr$$

$$= \frac{2}{R^2}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^R = \frac{2R^3}{R^2 3} = \frac{2R}{3}$$

c) $A(r) = \pi r^2$

$$E(A(X)) = \int_0^R A(r)\cdot f_X(r)\,dr$$

$$= \int_0^R \pi r^2 \cdot \frac{2r}{R^2}\,dr$$

$$= \frac{2\pi}{R^2}\int_0^R r^3\,dr$$

$$= \frac{2\pi}{R^2}\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^R$$

$$= \frac{2\pi R^4}{4R^2} = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$V(A(X)) = E(A(X)^2) - E(A(X))^2$$

$$E(A(X)^2) = \int_0^R A(r)^2\cdot f_X(r)\,dr$$

$$= \int^R \pi^2 r^4 \cdot \frac{2r}{\phantom{R}}\,dr$$

$$= \int_0^R \pi^2 r^4 \cdot \frac{2r}{R^2}\, dr$$

$$= \frac{2\pi^2}{R^2} \cdot \int_0^R r^5\, dr$$

$$= \frac{2\pi^2}{R^2} \left(\frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^R$$

$$= \frac{2\pi^2 R^6}{R^2 \cdot 6}$$

$$= \frac{\pi^2 R^4}{3}$$

$$VAR(A(X)) = E(A(X)^2) - E(A(X))^2$$

$$= \frac{\pi^2 R^4}{3} - \left(\frac{\pi R^2}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\pi^2 R^4}{3} - \frac{\pi^2 R^4}{4}$$

$$= \frac{\pi^2 R^4}{12} \; //$$

d) $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \dfrac{1}{|g'(g^{-1}(y))|}$ $\qquad Y = g(X)$

$A(r) = \pi r^2 \qquad A'(r) = 2\pi r$

$$A^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y}{\pi}} \qquad A'(A^{-1}(y)) = 2\pi\sqrt{\frac{y}{\pi}}$$

$y = A(x)$ : área de un círculo de radio $x$

$$f_Y(y) = \frac{\cancel{2}\sqrt{\cancel{\frac{y}{\pi}}}}{R^2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\pi\sqrt{\cancel{\frac{y}{\pi}}}} = \frac{1}{\pi R^2} \quad //$$

P2

jueves, 27 de mayo de 2021 15:17

**Pregunta 2**

Sea $X \sim N(0,1)$. Demuestre que $Y = X^2 \sim \text{Gamma}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Es decir, que el cuadrado de una distribución normal estándar es simplemente otra distribución conocida.

$$f_Y(y) = \frac{(1/2)^{1/2}\, y^{-1/2}\, e^{-1/2\, y}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow \text{Gamma}(1/2, 1/2)$$

$$\begin{aligned}
F_Y(y) = P(Y < y) &= P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) \\
&= P(X < \sqrt{y}) - P(X < -\sqrt{y}) \\
&= P(X < \sqrt{y}) - (1 - P(X < \sqrt{y})) \\
&= F_X(\sqrt{y}) - 1 + F_X(\sqrt{y}) \\
&= 2F_X(\sqrt{y}) - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} &= \frac{2\,\partial F_X(\sqrt{y})}{\partial y} \\
&= 2 f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \\
&= \cancel{2}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y/2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y}}
\end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \frac{(1/2)^{1/2} \cdot e^{-y/2} \cdot y^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} \leftarrow \text{Gamma}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

//