# Auxiliar #7

Variable Aleatoria Continua II

## Resumen

- **Teorema de Cambio de Variable (TCV):** Si $X$ es una VA continua y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente monótona y derivable; entonces $Y = g(X)$ tiene densidad:

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$$

O, alternativamente, recordando que la derivada de una función inversa, cuando esta es derivable, es de la forma $\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$; entonces:

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \frac{1}{\left|g'\left(g^{-1}(y)\right)\right|}$$

- **Esperanza de una función de V.A. continua:** Sea $X$ una variable aleatoria continua con densidad $f_X$; entonces, podemos calcular la esperanza la variable aleatoria Y = g(X) como:

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

- **PDF de una distribución Normal:** Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$, entonces su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}, \text{ con } x \in \mathbb{R}$$

- **PDF de una distribución Gamma:** Sea $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$, entonces su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \text{ con } x > 0$$

donde $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$.

## Pregunta 1

Imagine que en un juego de dardos existe la misma probabilidad de acertar en cualquiera de los puntos de la circunferencia de radio $R$ (los dardos se lanzan de manera aleatoria y siempre caen dentro de la circunferencia). Sea $X$ la variable aleatoria que representa la distancia entre el centro de la circunferencia y el punto en que cae el dardo.

a) Calcule la probabilidad de que $X$ sea menor o igual a un radio $r \leq R$ arbitrario. Luego, determine la función densidad de probabilidad (PDF) de $X$.

b) Calcule la esperanza de $X$. Luego, discuta si el resultado tiene sentido.

c) Sea $A(r)$ el área de una circunferencia de radio $r$. Calcule $\mathbb{E}(A(X))$ y $\mathbb{V}(A(X))$.

d) Utilice el TCV para obtener la función de densidad de $A(X)$.

## Pregunta 2

Sea $X \sim N(0,1)$. Demuestre que $Y = X^2 \sim \text{Gamma}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Es decir, que el cuadrado de una distribución normal estándar es simplemente otra distribución conocida.