FI2004-1 Termodinámica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliar: Roberto Gajardo.
Ayudante: David Pinto.

Desarrollo Auxiliar 13: Ecuación de calor.

06 de Julio del 2021.

P1. <u>Derivación de la ecuación de calor unidimensional</u>:

Consideremos un material lineal (no necesariamente unidimensional, pero cuya longitud es mucho más grande que sus demás dimensiones) formado por partículas que pueden moverse libremente, llevando energía cinética con ellas. En cada lámina del material tendremos una densidad de energía interna $u(x)$, la cual varía a medida que las partículas del material se desplazan, donde consideraremos un camino libre medio[1] ℓ. En ese sentido existirá un flujo de energía hacia el punto x proveniente desde los puntos $x-\ell$ y $x+\ell$, el cual llamaremos **flujo de calor** Q, y que naturalmente es proporcional a la densidad de partículas y la velocidad media con la cual estas se mueven, en ese sentido:

$$Q(x) = n\langle v\rangle \left[-u(x+\ell) - (-u(x-\ell))\right]$$

Donde el signo negativo en las cantidades relacionadas con u hace referencia a que la energía está "dejando" la posición x, y por lo tanto es negativa en el caso cuando las partículas se desplazan hacia $x+\ell$ y viceversa. Podemos desarrollar esta expresión para escribirla en función de una derivada que involucre la temperatura, y para ello haremos lo siguiente. Primero que todo haremos el cambio de variable $x-\ell \to x$, de esa forma $x+\ell \to x+2\ell$, y así:

$$Q(x) = -n\langle v\rangle \left[u(x+2\ell) - u(x)\right] \;\Rightarrow\; Q(x) = -2\ell n\langle v\rangle \left[\frac{u(x+2\ell)-u(x)}{2\ell}\right]$$

Si consideramos que el camino libre medio es infinitesimalmente pequeño entonces podemos decir que el término entre corchetes es la derivada de la energía interna con respecto a la posición x, es decir:

$$\Rightarrow\; Q(x) = -2\ell n\langle v\rangle \frac{du}{dx}$$

Usando regla de la cadena es posible escribir la derivada anterior en términos de la temperatura, es decir:

$$\Rightarrow\; Q(x) = -2\ell n\langle v\rangle \frac{du}{dT}\frac{dT}{dx}$$

Ahora recordamos que $\frac{du}{dT}$ está relacionado con la definición de capacidad calórica, y la llamaremos una constante C, entonces:

$$\Rightarrow\; Q(x) = -2\ell n\langle v\rangle C\frac{dT}{dx}$$

Entonces definiendo la constante $\kappa = 2\ell n\langle v\rangle C$ como el *coeficiente de conductividad térmica*, tendremos finalmente la siguiente ecuación diferencial para el flujo de calor en un material:

$$\Rightarrow\; Q(x) = -\kappa\frac{dT}{dx} \tag{1}$$

[1] En este modelo consideramos que todas las partículas de una capa de material se mueven en conjunto.

Ahora, hasta acá se ha hablado de cómo fluye el calor (y así cómo cambia la temperatura) en un punto del material, sin embargo no hemos discutido cómo evoluciona esta cantidad a lo largo del tiempo. Dado que la energía interna $U(x,t)$ cambiará en el tiempo como consecuencia de un flujo de calor que proviene de los puntos vecinos tendremos que:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\Delta x}\left[Q(x,t) - Q(x+\Delta x, t)\right]$$

Es decir, la evolución temporal de la energía interna es igual a la variación espacial de $Q(x,t)$, ya que esta variación de flujo de calor es la que cambia la energía interna, y por lo tanto la temperatura. Reordenando el lado derecho podemos ver que esto es simplemente el negativo de la derivada de Q con respecto a la posición x, entonces:

$$\Rightarrow \ \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Usando la expresión (1) en la ecuación anterior tendremos que:

$$\Rightarrow \ \frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Finalmente recordamos que en los casos simples podemos escribir $U = C_v T$, y definiendo $\alpha = \frac{\kappa}{C_v}$ como el **coeficiente de difusión térmica**, entonces:

$$\Rightarrow \ C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ \Rightarrow \ \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Esta ecuación a derivadas parciales se conoce como la **ecuación de calor**, y da cuenta de la evolución tanto espacial como temporal de la temperatura en un material lineal, que puede modelarse como un medio unidimensional. Esta ecuación puede extenderse a más dimensiones haciendo uso del operador laplaciano, donde se tiene que:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

Estas ecuaciones tienen infinitas soluciones dependiendo las condiciones iniciales y de borde que se apliquen, y en general se resuelve para cada caso particular aplicando los formalismos de series y transformada de Fourier.

P2. Barra calentada:

Este tipo de ejemplos puede resolverse utilizando el **método de separación de variables**, el cual se ve más a fondo en el curso de Cálculo Avanzado y Aplicaciones.

Primero que todo pensemos en la ecuación de calor encontrada en la parte anterior:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{2}$$

Al ser una ecuación a derivadas parciales de primer orden en el tiempo y segundo orden en el espacio necesitamos una condición inicial y dos condiciones de borde para resolverla de forma completa. Con lo que nos muestran en el enunciado podemos inferir que la condición inicial $T(x,0)$ corresponde a la mitad de la barra con temperatura T_0 y la otra mitad con temperatura $-T_0$, es decir, la condición inicial corresponde a una función definida por partes:

$$T(x,0) = \begin{cases} T_0 & , \quad 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ \\ -T_0 & , \quad \frac{L}{2} \leq x < L \end{cases} \tag{3}$$

Por otro lado las condiciones de borde del problema son que cada uno de los extremos de la barra están a temperatura nula en todo instante de tiempo t, es decir:

$$T(0,t) = 0 \quad ; \quad T(L,t) = 0$$

Con estas consideraciones ya somos capaces de abordar este problema con el método de separación de variables. Primero que todo diremos que la solución a la ecuación (2) puede escribirse como la multiplicación de dos funciones que dependen de cada variable por separado, es decir, $T(x,t) = X(x)\Theta(t)$. Con esto tendremos que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[X(x)\Theta(t)\right] = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[X(x)\Theta(t)\right] \;\Rightarrow\; X\frac{d\Theta}{dt} = \alpha\Theta\frac{d^2X}{dx^2}$$

En este último paso las funciones $X(x)$ y $\Theta(t)$ ignoraron la derivada al lado izquierdo y derecho de la ecuación (respectivamente) ya que son constantes con respecto a la variable con la cual se estaba derivando, además como las funciones dependen de una sola variable, las derivadas que les afectan en realidad son derivadas totales. Lo que hacemos ahora es pasar dividiendo $X(x)$ y $\Theta(t)$ para que cada lado de la igualdad dependa sólo de una variable, y así:

$$\Rightarrow \; \frac{1}{\Theta}\frac{d\Theta}{dt} = \alpha\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}$$

Como cada lado de la igualdad depende de una variable distinta, la única forma de que la igualdad se cumpla es que ambos lados sean iguales a una misma constante, la cual llamaremos λ, es decir:

$$\Rightarrow \; \frac{1}{\Theta}\frac{d\Theta}{dt} = \lambda \quad ; \quad \alpha\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \lambda$$

En este punto debemos probar qué valores de λ son consistentes con nuestras condiciones de borde, por lo tanto debemos resolver la ecuación asociada a $X(x)$. Desarrollando un poco tendremos que:

$$\Rightarrow \; \frac{d^2X}{dx^2} - \frac{\lambda}{\alpha}X = 0 \tag{4}$$

Partamos con el caso $\lambda = 0$. Si ese fuese el caso entonces tendríamos una ecuación diferencial cuya solución sería una recta, ya que:

$$\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d^2X}{dx^2} = 0 \;\Rightarrow\; X(x) = Ax + B$$

Como sabemos que $T(0,t) = T(L,t) = 0$ esto se traduce en que $X(0) = X(L) = 0$. Si $X(0) = 0$ entonces B=0, y al momento de aplicar la condición de borde $X(L) = 0$ encontraremos que $A = 0$. Con esto en el caso $\lambda = 0$ tendríamos $X(x) = 0$ para todo valor de x, con lo cual $T(x,t) = 0$, y eso no tiene sentido físico. Dado este resultado debemos movernos a las otras opciones para λ.

Consideremos ahora el caso $\lambda > 0$. En ese caso la ecuación diferencial (4) tiene como soluciones exponenciales, es decir:

$$\lambda > 0 \;\Rightarrow\; X(x) = Ae^{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x}$$

Al aplicar la condición $X(0) = 0$ tendremos que $B = -A$, entonces:

$$\Rightarrow \; X(x) = A\left(e^{\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x} - e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x}\right)$$

Considerando esto, al momento de aplicar la condición de borde $X(L) = 0$ esto sólo será posible si imponemos que $A = 0$, con lo cual $B = 0$ y así tendríamos que $X(x) = 0$. Al igual que en el caso anterior esto no tiene sentido físico para nuestro problema, por lo tanto descartamos también el caso donde $\lambda > 0$.

Sólo nos quedaría el caso donde $\lambda < 0$, en cuyo caso la ecuación diferencial (4) tiene soluciones oscilatorias, es decir:

$$\lambda < 0 \;\Rightarrow\; X(x) = A\cos\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}}x\right)$$

Si imponemos la condición $X(0) = 0$ tendremos que $A = 0$, con lo cual se tiene que:

$$\Rightarrow \; X(x) = B\sin\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}}x\right)$$

Ahora, al imponer la condición $X(L) = 0$ tendremos que:

$$X(L) = 0 \;\Rightarrow\; B\sin\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}}L\right) = 0$$

Como queremos que $B \neq 0$ (sino nuestro problema no podría resolverse con ningún valor de λ) entonces necesitamos que la parte del seno sea cero, lo cual ocurre cuando el argumento del seno es un múltiplo entero de π, es decir:

$$X(L) = 0 \;\Rightarrow\; \sin\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}}L\right) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}}L = \pi n \;\Rightarrow\; |\lambda| = \frac{\alpha\pi^2 n^2}{L^2}$$

Como estamos en el caso $\lambda < 0$, y como vemos que los valores de estas constantes dependen de $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\Rightarrow\; \lambda_n = -\frac{\alpha\pi^2 n^2}{L^2}$$

Con esto tenemos que:

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\sqrt{\frac{|\lambda_n|}{\alpha}}x\right) \;\Rightarrow\; X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

Como resolvimos la ecuación para $X(x)$ (a la vez que descubrimos los valores de la constante desconocida λ) ahora podemos ser capaces de resolver la ecuación para $T(t)$. Recordamos que esta ecuación nos dice que:

$$\frac{1}{\Theta}\frac{d\Theta}{dt} = \lambda \;\Rightarrow\; \frac{d\Theta}{dt} - \lambda\Theta = 0$$

Reemplazando $\lambda = \lambda_n$ encontrado anteriormente tendremos que:

$$\Rightarrow\; \frac{d\Theta}{dt} + \frac{\alpha\pi^2 n^2}{L^2}\Theta = 0$$

La solución a esta ecuación diferencial es una exponencial, y entonces:

$$\Rightarrow\; \Theta_n(t) = C_n \exp\left(-\frac{\alpha\pi^2 n^2}{L^2}t\right)$$

Recordando que la solución a la ecuación de calor es la multiplicación de $X(x)$ y $\Theta(t)$, tendremos que:

$$\Rightarrow\; T_n(x,t) = B_n C_n \exp\left(-\frac{\alpha\pi^2 n^2}{L^2}t\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

Vemos que esta solución sólo está asociada a un valor de $n \in \mathbb{N}$. Para obtener la solución más general posible debemos superponer todas las soluciones individuales, es decir, sumar sobre todos los n posibles, y entonces nombrando $D_n = B_n C_n$ a la multiplicación de las constantes de integración, tendremos finalmente la siguiente solución general para el problema con las condiciones de borde mencionadas:

$$\Rightarrow\; T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \exp\left(-\frac{\alpha\pi^2 n^2}{L^2}t\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \tag{5}$$

Esta es una familia de soluciones, cada una caracterizada por un conjunto de constantes D_n que se determina a partir de la condición inicial, donde se cumple que:

$$T(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

Entonces, lo que se debe hacer para obtener las constantes D_n es encontrar la serie de senos de la función $T(x,0)$ que caracteriza la condición inicial de la barra, es decir:

$$\Rightarrow\ D_n = \frac{2}{L}\int_0^L T(x,0)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

En este caso en particular la función $T(x,0)$ está dada por la expresión (3), entonces:

$$\Rightarrow\ D_n = \frac{2T_0}{L}\left[\int_0^{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx - \int_{\frac{L}{2}}^{L} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx\right]$$

$$\Rightarrow\ D_n = \frac{2T_0}{L}\left[\left(-\frac{L}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{L}{2}} - \left(-\frac{L}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\right)\Bigg|_{\frac{L}{2}}^{L}\right]$$

$$\Rightarrow\ D_n = \frac{2T_0}{\pi n}\left[-\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 1 + \cos(\pi n) - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\ D_n = \frac{2T_0}{\pi n}\left[1 + (-1)^n - 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]$$

Reemplazando esto en la expresión (5) tendremos finalmente la función $T(x,t)$ que modela la temperatura en la barra a lo largo del tiempo:

$$\Rightarrow\ \boxed{T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_0}{\pi n}\left[1 + (-1)^n - 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]\exp\left(-\frac{\alpha \pi^2 n^2}{L^2}t\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)}$$

Podemos notar que la temperatura en la barra se puede modelar como una superposición de funciones oscilatorias en el espacio y decrecientes en el tiempo, donde los modos de oscilación mayores (n grande) tienden a decrecer más rápido (por el factor $-n^2$ en la exponencial). En el link de pie de página[2] se puede encontrar un gif de la evolución de la temperatura a lo largo de la barra para el caso $\alpha = 0{,}02$ y $L = 10$. Podemos notar que la temperatura de la barra se vuelve continua en el punto medio de la barra, y además toda la temperatura de la barra tiende lentamente a $T = 0$ por la condición en los bordes.

[2] `https://drive.google.com/file/d/1KlppROrRcKPBO1Qu4sAIdfmYchhEg2gr/view?usp=sharing`

P3. **Creación de una estrella:**

Considerando la estrella como una masa puntual y que el ambiente está a temperatura cero, la temperatura inicial de este problema puede escribirse como $T(\vec{r},0) = T_*\delta(\vec{r})$, donde $\delta(\vec{r})$ es la delta de Dirac[3] en tres dimensiones. Si imaginamos la situación inmediatamente después de la creación de la estrella es claro que la temperatura será muy intensa en los lugares cercanos a ella para cualquier instante de tiempo posterior a su creación, de tal forma que en los lugares infinitamente lejanos a la estrella la temperatura se mantiene en cero, es decir, la condición de borde del problema es:

$$\lim_{|\vec{r}|\to\infty} T(\vec{r},t) = 0$$

Entonces, sea la ecuación de calor en tres dimensiones:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \tag{6}$$

Este tipo de problemas puede resolverse utilizando la **transformada de Fourier** $\mathcal{F}$ en la parte espacial del sistema, recordando que por propiedad de la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{\partial_\alpha f\}\left(\vec{k}\right) = (ik_\alpha)^n \mathcal{F}\{f\}(k) \quad ; \quad \alpha = 1,2,3$$

Con esta propiedad es posible demostrar que:

$$\mathcal{F}\{\nabla^2 T\}\left(\vec{k}\right) = -k^2 \mathcal{F}\{f\}(k)$$

Entonces, aplicando transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación (6) y usando la notación $\mathcal{F}\{T\}(\vec{k},t) = \hat{T}(\vec{k},t)$ tendremos que:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\nabla^2 T \;\Rightarrow\; \mathcal{F}\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\} = \mathcal{F}\left\{\alpha\nabla^2 T\right\}$$
$$\Rightarrow\; \frac{\partial \mathcal{F}\{T\}}{\partial t} = -\alpha k^2 \mathcal{F}\{T\} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = -\alpha k^2 \hat{T}$$

Este último resultado puede integrarse con respecto al tiempo para obtener una expresión $\hat{T}(\vec{k},t)$, entonces:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = -\alpha k^2 \hat{T} \;\Rightarrow\; \frac{d\hat{T}}{\hat{T}} = -\alpha k^2 dt \;\Rightarrow\; \int \frac{d\hat{T}}{\hat{T}} = -\alpha k^2 \int dt + C$$
$$\Rightarrow\; \ln\left(\hat{T}\right) = -\alpha k^2 t + C \;\Rightarrow\; e^{\ln(\hat{T})} = e^{-\alpha k^2 t + C} \;\Rightarrow\; \hat{T}(\vec{k},t) = \hat{T}(\vec{k},0)e^{-\alpha k^2 t} \tag{7}$$

En este caso la constante de integración $e^C = \hat{T}(\vec{k},0)$ corresponde al valor de $\hat{T}$ en $t=0$, y puede obtenerse a partir de la transformada de Fourier de la condición inicial $T(\vec{r},0)$, ya que:

$$\hat{T}(\vec{k},0) = \mathcal{F}\{T\}(\vec{k},0) \;\Rightarrow\; \hat{T}(\vec{k},0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int T(\vec{r},0)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d\vec{r}$$

[3] `https://es.wikipedia.org/wiki/Delta_de_Dirac`

Reemplazando $T(\vec{r},0) = T_*\delta(\vec{r})$ y desarrollando tendremos que:

$$\Rightarrow\ \hat{T}(\vec{k},0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int T_*\delta(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d\vec{r}\ \Rightarrow\ \hat{T}(\vec{k},0) = \frac{T_*}{(2\pi)^3}\int \delta(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d\vec{r}$$

Por propiedad de la función $\delta(\vec{r})$ la integral corresponde al valor del integrando (sin contar la delta) en $\vec{r}$ tal que el argumento de la función delta se anula. En este caso eso pasa en $\vec{r} = \vec{0}$, entonces:

$$\Rightarrow\ \hat{T}(\vec{k},0) = \frac{T_*}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{0}}\ \Rightarrow\ \hat{T}(\vec{k},0) = \frac{T_*}{(2\pi)^3}$$

Entonces, reemplazando en la expresión (7):

$$\Rightarrow\ \hat{T}(\vec{k},t) = \frac{T_*}{(2\pi)^3}e^{-\alpha k^2 t}$$

Ahora, si queremos obtener la función $T(\vec{r},t)$ debemos aplicar la antitransformada de Fourier a esta expresión, entonces:

$$T(\vec{r},t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{T}\}(\vec{r},t)\ \Rightarrow\ T(\vec{r},t) = \int T(\vec{k},t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}d\vec{k}$$

$$\Rightarrow\ T(\vec{r},t) = \int \frac{T_*}{(2\pi)^3}e^{-\alpha k^2 t}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}d\vec{k}$$

Para poder realizar esta integral usamos sin pérdida de generalidad un sistema de coordenadas esféricas en donde $\vec{k} = k\hat{z}$, de tal forma que[4] $\vec{k}\cdot\vec{r} = kr\cos(\theta)$, entonces:

$$\Rightarrow\ T(\vec{r},t) = \frac{T_*}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} e^{-\alpha k^2 t}e^{-ikr\cos(\theta)}k^2\sin(\theta)d\phi d\theta dk$$

La integral en el ángulo ϕ es directa y nos entrega un factor 2π, entonces:

$$\Rightarrow\ T(\vec{r},t) = \frac{2\pi T_*}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi e^{-\alpha k^2 t}e^{-ikr\cos(\theta)}k^2\sin(\theta)d\theta dk$$

Para la integral con respecto a θ hacemos el siguiente cambio de variable:

$$u = -\cos(\theta)\ \Rightarrow\ du = \sin(\theta)d\theta$$

$$\theta = 0\ \Rightarrow\ u = -1\quad ;\quad \theta = \pi\ \Rightarrow\ u = 1$$

Entonces:

$$T(\vec{r},t) = \frac{T_*}{(2\pi)^2}\int_0^\infty k^2 e^{-\alpha k^2 t}\left(\int_{-1}^1 e^{ikru}du\right)dk = \frac{T_*}{(2\pi)^2}\int_0^\infty k^2 e^{-\alpha k^2 t}\frac{1}{ikr}\left[e^{ikr} - e^{-ikr}\right]dk$$

[4] Recordemos que en coordenadas esféricas $\vec{r} = r\cos(\phi)\sin(\theta)\hat{x} + r\sin(\phi)\sin(\theta)\hat{y} + r\cos(\theta)\hat{z}$, donde θ es el ángulo que $\vec{r}$ forma con el eje $\hat{z}$.

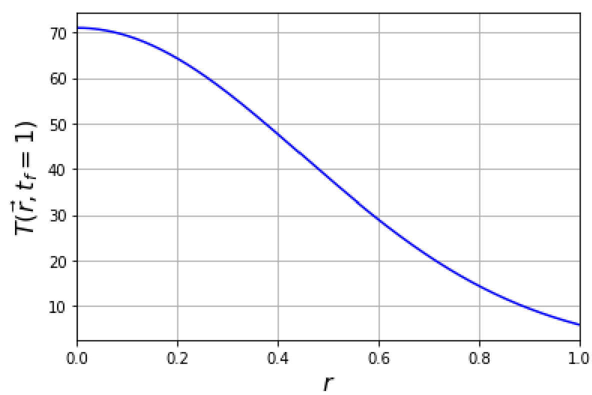
Podemos multiplicar por 2 en el numerador y denominador para encontrar la definición compleja de la función seno, entonces:

$$\Rightarrow\ T(\vec{r},t) = \frac{2T_*}{r(2\pi)^2}\int_0^\infty ke^{-\alpha k^2 t}\left[\frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{2i}\right]dk\ \Rightarrow\ T(\vec{r},t) = \frac{2T_*}{r(2\pi)^2}\int_0^\infty ke^{-\alpha k^2 t}\sin(kr)dk$$

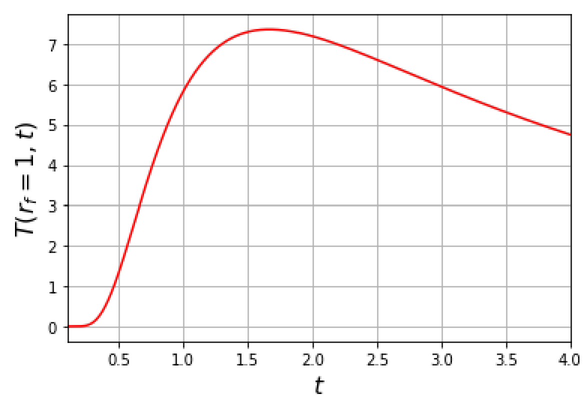
Esta integral puede calcularse si aplicamos variable compleja, pero para el nivel de este curso y para lo que queremos encontrar es suficiente con integrar en un software[5], y entonces:

$$\Rightarrow\ T(\vec{r},t) = \frac{2T_*}{r(2\pi)^2}\frac{\sqrt{\pi}r}{4(\alpha t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{r^2}{4\alpha t}}\ \Rightarrow\ \boxed{T(\vec{r},t) = \frac{T_*}{(4\pi\alpha t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{r^2}{4\alpha t}}}$$

Podemos interpretar este resultado para un tiempo t_f y un radio r_f fijo por separado. Por ejemplo para cualquier instante de tiempo $t_f > 0$ la temperatura en el espacio tiene un comportamiento gaussiano, tal como se muestra en el siguiente gráfico:



Esto nos dice que a medida que nos alejamos del punto de creación de la estrella la temperatura disminuye rápidamente, tendiendo a $T = 0$ si nos alejamos infinitamente. Por otro lado para una distancia radial r_f arbitraria desde el punto de creación de la estrella se tiene el siguiente comportamiento:



Podemos notar que en un punto fijo del espacio la temperatura se eleva rápidamente hasta un valor máximo, para luego disminuir un poco más lento con el paso del tiempo.

[5] Yo recomiendo mucho la calculadora de integrales: `https://www.calculadora-de-integrales.com/`