



# **FI2003 - MÉTODOS EXPERIMENTALES**

## **Apuntes del curso**

Elaborado por: Víctor Fuenzalida, Raúl Muñoz,  
Nicolás Mujica, Claudio Falcón, María Luisa Cordero

Departamento de Física  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Universidad de Chile

14 de marzo de 2017



# Índice general

<b>Unidad 1: Corriente continua</b>	<b>1</b>
1.1. Fuerza de Coulomb . . . . .	1
1.2. Campo eléctrico . . . . .	1
1.3. Diferencia de potencial . . . . .	2
1.4. Corriente eléctrica . . . . .	3
1.5. Potencia eléctrica . . . . .	3
1.6. Resistencia eléctrica . . . . .	4
1.7. Ley de Ohm . . . . .	5
1.8. Asociación de componentes . . . . .	5
1.9. Leyes de Kirchhoff . . . . .	5
1.10. Aplicaciones de las leyes de Ohm y de Kirchhoff . . . . .	6
<b>Unidad 2: Condensadores</b>	<b>9</b>
2.1. Condensador . . . . .	9
2.2. Circuito RC . . . . .	9
2.3. Asociación de condensadores . . . . .	11
<b>Unidad 3: Corriente alterna</b>	<b>13</b>
3.1. Corriente alterna . . . . .	13
3.2. Inductancia . . . . .	14
3.3. Circuito RL . . . . .	15
3.4. Osciloscopio . . . . .	15
<b>Unidad 4: Filtros de frecuencia</b>	<b>17</b>
4.1. Estados transiente y estacionario . . . . .	17
4.2. Formalismo de impedancia . . . . .	18

4.3. La respuesta estacionaria del circuito RC . . . . .	19
4.4. Filtros de frecuencia . . . . .	19
4.5. El circuito LC . . . . .	20
4.6. El circuito RLC y el factor de calidad . . . . .	21
4.7. El circuito RLC forzado sinusoidalmente . . . . .	21
4.8. La respuesta transiente de un circuiro RLC . . . . .	23
4.9. El estado estacionario . . . . .	23
<b>Unidad 5: Diodos</b>	<b>25</b>
5.1. Semiconductores . . . . .	25
5.2. Dopado . . . . .	26
5.3. Juntura NP: el diodo . . . . .	27
5.4. Circuito rectificador de media onda . . . . .	28
5.4.1. Efecto de un condensador en paralelo: suavización de la respuesta . . . . .	29
5.5. Rectificador de onda completa con puente de diodos. . . . .	29
<b>Unidad 6: Celdas fotovoltaicas</b>	<b>33</b>
6.1. Generación de par electrón-hueco . . . . .	33
6.2. Energía de los fotones . . . . .	33
6.3. Mecanismo de operación . . . . .	34
6.4. Voltaje de circuito abierto y corriente de corto circuito . . . . .	35
6.5. Curvas <i>IV</i> y <i>PV</i> de una celda fotovoltaica . . . . .	36
<b>Unidad 7: Tarjeta de adquisición</b>	<b>37</b>
7.1. Conversión analógica-digital . . . . .	37
<b>Unidad 8: Análisis de Fourier</b>	<b>47</b>
8.1. Fundamentos de elasticidad lineal . . . . .	47
8.1.1. Modos de resonancia de una barra elástica . . . . .	49
8.1.2. Series de Fourier . . . . .	51
8.1.3. Ejemplo de uso de series de Fourier . . . . .	53
<b>Unidad 9: Regresión lineal</b>	<b>55</b>
9.1. Ajuste de un modelo lineal . . . . .	55
9.2. Casos especiales . . . . .	58

# Unidad 1: Corriente continua

## 1.1. Fuerza de Coulomb

En 1785, Charles Coulomb describió la fuerza que existe entre cargas estáticas. Hoy en día, esta fuerza se conoce como *fuerza de Coulomb*. Si tenemos dos partículas estáticas de cargas  $q_1$  y  $q_2$ , separadas por una distancia  $r$ , la fuerza debido a sus cargas cumple con:

$$|\vec{F}| \propto \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \quad (1.1)$$

Si esta relación se expresa en unidades del Sistema internacional de medidas (S.I.), o sea, cargas en Coulomb, C, distancia en metros, m, y fuerza en Newton, N, encontramos que en el vacío:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}, \quad (1.2)$$

en donde  $1/(4\pi\epsilon_0) \approx 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ , y  $\epsilon_0$  se conoce como la permitividad del espacio vacío.

Consideremos que  $q_2$  está fija y que se coloca  $q_1$  a una cierta distancia de manera que esta puede moverse bajo una fuerza, en particular nos interesa la fuerza que  $q_2$  ejerce sobre ella. Vectorialmente, la expresión anterior la podemos escribir como

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (1.3)$$

válida en el S.I.<sup>1</sup>, donde  $\vec{r}_{12}$  es el vector posición, desde  $q_2$  hacia  $q_1$ . Así,  $\vec{F}_{12}$  es la fuerza que ejerce  $q_2$  sobre  $q_1$ . Si las cargas son de signo contrario,  $q_1 q_2 < 0$ , entonces la fuerza apunta desde  $q_1$  hacia  $q_2$ , por lo tanto es atractiva; en caso contrario, apunta desde  $q_2$  hacia  $q_1$ , y es repulsiva. Por supuesto que por acción y reacción  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ .

## 1.2. Campo eléctrico

Coloquemos una carga puntual  $q_2$  en el espacio, la cual dejaremos fija como en el párrafo anterior. El entorno de la carga se ve modificado por la aparición de un campo, conocido como campo eléctrico.

---

<sup>1</sup>En otros sistemas de unidades la forma de la ley es la misma, pero la constante  $1/(4\pi\epsilon_0)$  cambia.

Dicho campo eléctrico queda definido por la siguiente expresión, que permite interpretarlo como fuerza por unidad de carga:

$$\vec{F}_{12} = q_1 \vec{E}_{12}, \quad (1.4)$$

donde  $\vec{E}_{12}$  es el campo eléctrico en la posición de  $q_1$  debido a la presencia de  $q_2$ . De esta expresión, podemos obtener el campo eléctrico generado por la carga puntual  $q_2$

$$\vec{E}_{12} = \frac{\vec{F}_{12}}{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad (1.5)$$

donde otra vez  $\vec{r}_{12}$  es el vector posición, desde la carga  $q_2$  hacia la  $q_1$ . Si ubicamos  $q_2$ , que ahora llamaremos  $Q$ , en el origen, la expresión queda

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}, \quad (1.6)$$

donde  $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$  es el vector unitario que apunta desde el origen, donde colocamos la carga  $Q$ , hacia un punto del espacio dado por el vector posición  $\vec{r}$ . Aquí se ha simplificado la notación,  $\vec{E}_{12} = \vec{E}(\vec{r})$ .

Finalmente, si cambiamos la partícula de carga  $Q$ , por un continuo de carga de densidad  $\rho = dq/dV$  en un volumen  $V$ , obtenemos que el campo es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r^2} \hat{r}. \quad (1.7)$$

En el S.I., la unidad de medida del campo eléctrico es N/C, que, como se verá más adelante, equivale a V/m (Volt por metro).

### 1.3. Diferencia de potencial

Al mover una carga  $q$  entre dos puntos  $a$  y  $b$  en una zona con un campo eléctrico  $\vec{E}$ , se realiza un trabajo  $W_{ab}$ . Como consecuencia, la energía potencial eléctrica se verá modificada en  $-W_{ab}$ . Se define la diferencia de potencial eléctrico como el cociente entre el cambio de energía eléctrica debido al movimiento de la carga  $q$ , y su valor  $q$ . La definición formal de la diferencia de potencial es:

$$\Delta V_{ab} = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-W_{ab}}{q} = \frac{-1}{q} \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (1.8)$$

La unidad de medida en el S.I. de la diferencia de potencial eléctrico es el Volt, V. Habitualmente, al trabajar en circuitos, se usan los términos *caída de voltaje* o *caída de tensión eléctrica* para referirse a la diferencia de potencial. Podemos definir el término potencial eléctrico en un punto, como la diferencia de potencial entre este punto e infinito, en donde consideramos que el potencial eléctrico es cero:

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (1.9)$$

En circuitos eléctricos, un aparato capaz de generar una diferencia de potencial eléctrico entre dos terminales (como por ejemplo, una pila) se denomina fuente de voltaje continuo y se simboliza como en los esquemas de la figura 1. La diferencia de potencial generada por estos dispositivos se denomina *fuerza electromotriz*  $\varepsilon$ .

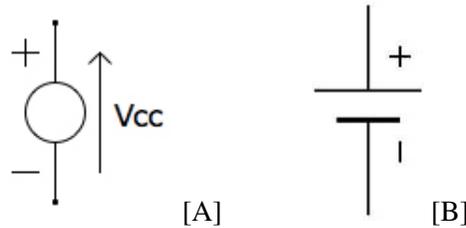


Figura 1.1: [A] y [B] Representaciones de una fuente de poder.

## 1.4. Corriente eléctrica

Al aplicar una diferencia de potencial sobre un conjunto de cargas generamos un campo eléctrico dado por

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V. \quad (1.10)$$

A la vez, este campo genera una fuerza sobre las cargas y su aceleración correspondiente. Es decir, una diferencia de potencial genera corriente eléctrica. Definimos la corriente eléctrica como la cantidad de carga eléctrica  $dq$  que atraviesa una posición en el espacio en un intervalo de tiempo  $dt$ :

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (1.11)$$

Si las cargas están en unidades de Coulomb, C, y el tiempo en segundos, s, la unidad de medida del S.I. para corriente eléctrica, es el Ampere,  $A = C/s$ .

## 1.5. Potencia eléctrica

Es importante determinar cuánta energía puede entregar un circuito eléctrico y de qué depende. Consideremos un circuito como el de la figura 1.2, en el cual se tiene algún elemento activo que genera una diferencia de potencial (como por ejemplo, una pila, una fuente de poder, etc.), y una “caja” que representa algún elemento que va a utilizar la energía. El terminal  $a$  está a mayor potencial que el terminal  $b$ . Al mover un elemento de carga  $dq$  de  $a$  hacia  $b$ , esta carga disminuirá su energía potencial en  $dqV_{ab}$ , es decir

$$dU = dqV_{ab} = IdtV_{ab}. \quad (1.12)$$

La potencia eléctrica estará dada por la cantidad de energía consumida por la caja por unidad de tiempo

$$P = \frac{dU}{dt} = IV_{ab}. \quad (1.13)$$

Si en la fórmula anterior  $I$  está en Ampere y  $V_{ab}$  en Volt, la potencia eléctrica se mide en Watt,  $W = A V$ . La ecuación anterior es válida para corriente continua, es decir constante en el tiempo. Después veremos que también es válida en cualquier instante para corriente alterna, es decir para una corriente que varía con el tiempo.

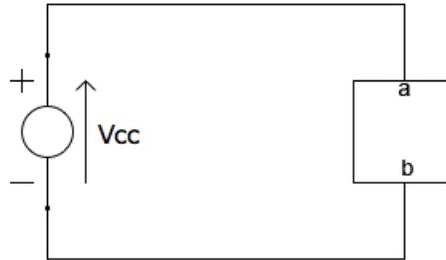


Figura 1.2: Esquema de un circuito compuesto por una fuente de voltaje continuo y una “caja” que utiliza la energía eléctrica.

## 1.6. Resistencia eléctrica

Un conductor eléctrico contiene portadores de carga (iones, electrones, etc.) libres de movimiento, es decir, no enlazados a ningún átomo en particular. Si se aplica un voltaje (diferencia de potencial) entre los dos extremos de un trozo de metal, los electrones libres se moverán bajo la influencia del campo eléctrico. El flujo de electrones es obstaculizado por colisiones con desórdenes en la red del metal, átomos de otro material, superficies, etc. Estas colisiones producen calor, lo que se conoce como efecto Joule, y hacen que la energía se disipe térmicamente. La oposición a la movilidad de los electrones se conoce como resistencia eléctrica ( $R$ ), y está definida por la relación:

$$R = \frac{V}{I} \quad (1.14)$$

en donde  $V$  representa el voltaje e  $I$  la corriente. Si las unidad de medida de  $V$  es Volt y de  $I$  es Ampere, entonces la resistencia eléctrica se mide en Ohm y se simboliza por  $\Omega$ . En un circuito eléctrico, una resistencia tiene un símbolo como el que se presenta en la figura 1.3.

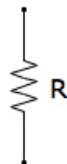


Figura 1.3: Representación de una resistencia eléctrica.

Las resistencias que se emplean en circuitos eléctricos se fabrican con valores que cubren un amplio rango. Para caracterizarlas, además del símbolo  $\Omega$  se usan los prefijos indicados en el cuadro 1.1

nombre	prefijo	valor
nano	n	$10^{-9}$
micro	$\mu$	$10^{-6}$
mili	m	$10^{-3}$
kilo	k	$10^3$
mega	M	$10^6$
giga	G	$10^9$

Cuadro 1.1: Prefijos para múltiplos y submúltiplos decimales.

El valor nominal de la resistencia aparece etiquetado sobre la resistencia con bandas de color según un código. Los dos primeros colores indican dígitos, y el tercero el exponente de la potencia de 10 por la cual se multiplica el número anterior. Una cuarta banda se agrega para indicar la tolerancia (porcentaje máximo de error) del valor nominal. La equivalencia entre colores y números la encontrará en el laboratorio en tablas pegadas en la muralla. El valor real de la resistencia es el medido por el multímetro.

## 1.7. Ley de Ohm

Si la variación del voltaje sobre un dispositivo genera una variación linealmente dependiente en la corriente, decimos que el dispositivo se encuentra en el rango óhmico o que sigue la ley de Ohm, esta ley queda expresada por la relación

$$V = IR. \quad (1.15)$$

## 1.8. Asociación de componentes

Cuando hay dos o más elementos formando un circuito, se puede diferenciar dos maneras comunes de conectarlos: en serie y en paralelo. Conectar en serie quiere decir que entre cada par de elementos existe un solo punto común, y sin conexión al resto. Una conexión en paralelo quiere decir que a ambos lados de cada elemento existe un punto común, a todo el resto. Un ejemplo de conexión en serie está dado en la figura 1.4[A] con dos resistencias. En la figura 1.4[B] se muestra una conexión en paralelo de dos resistencias.

## 1.9. Leyes de Kirchhoff

Estas leyes tratan sobre el comportamiento de circuitos eléctricos con asociaciones de componentes. La base para una deducción rigurosa de estas leyes está en la conservación de la carga eléctrica y la energía.

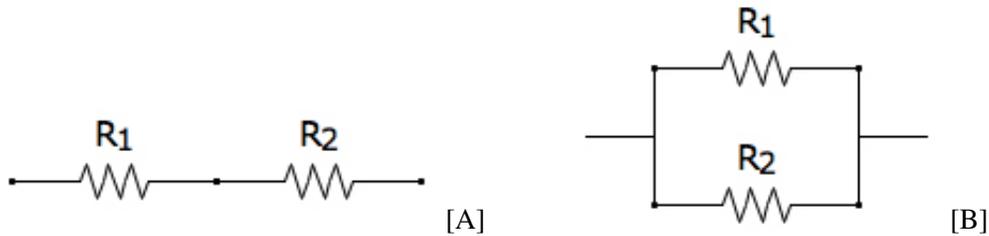


Figura 1.4: [A] Resistencias en serie. [B] Resistencias en paralelo

La primera ley se conoce también como la ley de las corrientes. Esta dice que la suma de intensidades de corriente que llegan a un punto común es igual a la suma de intensidades que salen de él. Si consideramos positivas las corrientes que llegan y negativas las que salen, esta ley establece que la suma algebraica de las intensidades de todas las corrientes sobre un punto común es cero,

$$\sum_i I_i = 0. \quad (1.16)$$

La segunda ley se conoce también como la ley de los voltajes. Esta dice que en un circuito cerrado, la suma algebraica de las fuerzas electromotrices es igual a la suma algebraica de las caídas de tensión, entonces

$$\sum \varepsilon = \sum \text{caída de voltaje}. \quad (1.17)$$

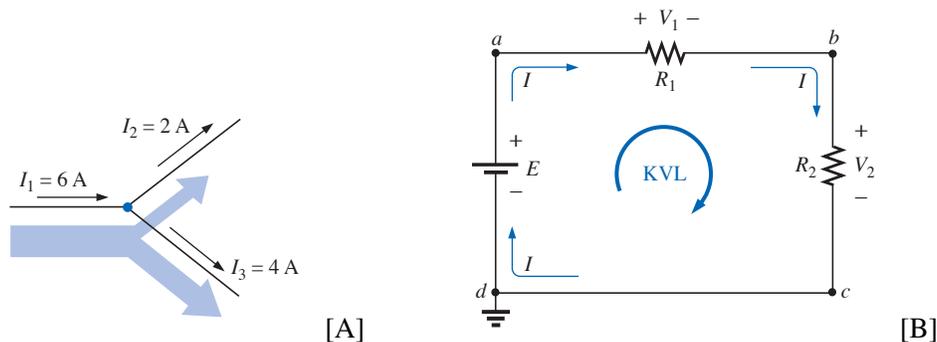


Figura 1.5: [A] Aplicación de la primera ley de Kirchhoff a un nodo, en este ejemplo  $I_1 = I_2 + I_3$  se cumple que  $-6 \text{ A} + 4 \text{ A} + 2 \text{ A} = 0$ . [B] Aplicación de la ley de voltaje de Kirchhoff a un circuito en serie, en este ejemplo se tiene  $E = V_1 + V_2$  por lo que se cumple que  $-E + V_1 + V_2 = 0$ .

## 1.10. Aplicaciones de las leyes de Ohm y de Kirchhoff

### ■ Mediciones de corriente:

El aparato que mide corriente se llama amperímetro. Para medir la corriente que pasa por alguna componente, basta conectar en serie el amperímetro con la componente. Un amperímetro ideal tiene resistencia cero para no afectar al circuito.

- Mediciones de voltaje:

El aparato que mide voltaje se llama voltímetro. Para medir la caída de voltaje que produce alguna componente, basta conectar en paralelo el voltímetro a la componente. Un voltímetro ideal, tiene resistencia infinita para no afectar al circuito.

- Resistencia equivalente:

Llamamos resistencia equivalente a una resistencia imaginaria, que puede reemplazar a una serie de otras interconectadas, logrando la misma corriente de alimentación del circuito. Por ejemplo, al conectar en serie  $n$  resistencias  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , su resistencia equivalente vale:

$$Req_{serie} = \sum_{k=1}^n R_k = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n. \quad (1.18)$$

Si en vez de conectarlas en serie, lo hacemos en paralelo, entonces, obtenemos

$$\frac{1}{Req_{paralelo}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (1.19)$$



# Unidad 2: Condensadores

## 2.1. Condensador

El condensador es un dispositivo que puede almacenar carga eléctrica y energía. La forma más simple de un condensador consiste en dos placas conductoras paralelas. La energía es almacenada en el campo eléctrico entre las placas. El símbolo que se emplea en los circuitos eléctricos para describir un condensador es:

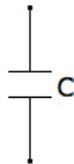


Figura 2.1: Representación de un condensador eléctrico.

La capacidad o capacitancia de un condensador se define por la relación:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}, \quad (2.1)$$

donde  $Q$  es la cantidad de carga acumulada y  $\Delta V$  la diferencia de potencial entre sus placas. Si la carga se mide en Coulomb, y la diferencia de potencial en Volt, la capacidad se mide en Faradios (o Farad) F. La capacidad se define como una magnitud positiva.

## 2.2. Circuito RC

Debido al tiempo que el condensador tarda en cargarse y descargarse, podemos considerar dos estados diferentes en un circuito  $RC$ . El estado transiente corresponde al período después de conectar o desconectar el circuito, mientras el condensador se carga o descarga, respectivamente. El estado estacionario corresponde al comportamiento del circuito una vez que ha pasado suficiente tiempo desde la conexión o la desconexión y el condensador ha llegado a un estado de carga constante en el tiempo.

En esta guía estudiaremos el estado transiente. Considere el circuito de la figura 2.2. El interruptor está inicialmente cerrado, de manera que el condensador está cargado con el voltaje de la fuente  $V$ . La

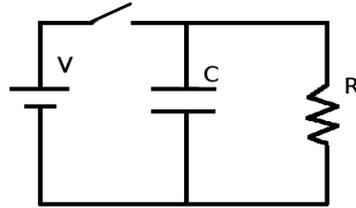


Figura 2.2: Representación de un circuito RC.

magnitud de la carga en cada placa es  $Q_0 = CV$ . Entonces se abre el interruptor. El condensador empieza inmediatamente a descargarse, generándose una corriente eléctrica desde una placa del condensador, a través de la resistencia, hasta la otra placa.

La correspondiente disminución de la carga en las placas del condensador hace que el voltaje  $V$  disminuya, con lo cual también disminuye la corriente. Así, la carga disminuye rápidamente al principio y después más y más lentamente.

La corriente que fluye por el circuito se debe a la descarga del condensador, entonces:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}, \quad (2.2)$$

y por ley de Ohm la corriente que pasa por la resistencia está dada por

$$I(t) = \frac{V(t)}{R}. \quad (2.3)$$

Utilizando la ley de voltajes de Kirchoff se tiene que la caída de tensión en la resistencia es  $V(t) = Q(t)/C$ , de manera que:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}. \quad (2.4)$$

Se desprende que la tasa de disminución de la carga, en cualquier momento, es simplemente proporcional a la carga restante. La única función que tiene esta propiedad es la exponencial, de manera que la solución de la ecuación anterior es

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (2.5)$$

El producto  $RC$  se llama la constante de tiempo  $\tau$  del circuito. Para el tiempo  $t = \tau$ , la carga ha disminuido a una fracción  $Q/Q_0 = e^{-1} = 0.368$  del valor original. Si se considera que la descarga del condensador es suficientemente completa cuando se haya perdido un 99% de la carga, es fácil verificar que ello ocurre luego de un tiempo  $t$  del orden de  $5\tau$ . La evolución en el tiempo del voltaje y la corriente pueden obtenerse de la ecuación anterior

$$V(t) = V e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (2.6)$$

e

$$I(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (2.7)$$

### 2.3. Asociación de condensadores

Llamamos capacidad equivalente a un condensador imaginario que puede reemplazar a una serie de otros interconectados. Por ejemplo, al conectar en serie  $n$  condensadores de capacidades  $C_1, \dots, C_n$ , su capacidad equivalente es

$$\frac{1}{C_{\text{equivalente}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (2.8)$$

Si en vez de conectarlos en serie, se hace en paralelo, entonces se obtiene:

$$C_{\text{equivalente}} = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (2.9)$$

Note que nemotécnicamente la forma de las capacidades equivalentes es al revés que en el caso de las resistencias. O sea, si se quiere aumentar la capacidad, se debe conectar más condensadores en paralelo. En cambio, si se quiere aumentar la resistencia, se deben agregar más resistencias en serie.



# Unidad 3: Corriente alterna

## 3.1. Corriente alterna

La potencia eléctrica que se distribuye para usos domiciliarios e industriales es casi universalmente una señal que tiene variación sinusoidal con el tiempo. Se denomina corriente alterna (abreviado CA o AC en inglés).

El suministro de potencia eléctrica en el laboratorio es en corriente alterna de una frecuencia de 50 Hz, es decir, tiene una forma de onda sinusoidal de período 20 milisegundos. Una manera de caracterizar su voltaje es midiendo la diferencia entre un máximo y un mínimo de la onda, lo que se conoce como voltaje de extremo a extremo o *peak-to-peak*  $V_{PP}$ . Si la onda es simétrica, la amplitud  $A$  de la onda corresponde a la mitad del voltaje *peak-to-peak*, como lo muestra la figura 3.1.

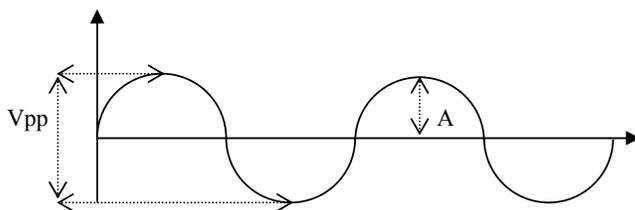


Figura 3.1: Demostración de  $V_{pp}$ ,  $A$ .

Otra manera más habitual es expresar el voltaje a través del valor eficaz, en inglés *Root Mean Square* o RMS. Este valor es la raíz cuadrada del promedio del cuadrado del valor instantáneo del voltaje. Por ejemplo, para un voltaje sinusoidal de amplitud  $A$ , es decir,  $V(t) = A \sen \omega t$ :

$$\overline{V(t)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (A \sen(\omega t))^2 d(\omega t) = \frac{1}{2} A^2 \quad (3.1)$$

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{V(t)^2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad (3.2)$$

Análogamente,

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{I(t)^2}} \quad (3.3)$$

La red eléctrica, por ejemplo, tiene una amplitud máxima de  $A = 311$  V y un valor eficaz de  $V_{\text{rms}} = 220$  V. Se puede demostrar que para una onda cuadrada simétrica  $V_{\text{rms}} = A$ , y para una triangular simétrica  $V_{\text{rms}} = A/\sqrt{3}$ .

Para ilustrar el significado del término *valor eficaz* considere la potencia disipada térmicamente en una resistencia. La potencia disipada se obtiene sustituyendo  $R = V/I$  en la ecuación de la potencia:

$$P(t) = I^2 R \quad (3.4)$$

Se ve que la potencia promedio disipada para una corriente alterna  $I(t) = A \cos(\omega t)$  es:

$$\overline{P(t)} = \overline{I^2(t)} R = I_{\text{rms}}^2 R \quad (3.5)$$

La corriente alterna de magnitud  $I_{\text{rms}}$  tiene el *efecto* de una corriente continua de la misma magnitud en el sentido de que la potencia disipada promedio es la misma para ambas. De esta manera, desde un punto de vista energético, es mejor hablar de voltaje RMS que de voltaje *peak-to-peak*.

## 3.2. Inductancia

En 1831 Michael Faraday descubrió que el cambio del flujo magnético a través de un circuito cerrado induce un voltaje en el mismo, es decir, una fuerza electromotriz. Este descubrimiento conectó dos campos hasta entonces separados, la electricidad y el magnetismo, lo cual produjo una revolución en el desarrollo de máquinas eléctricas, motores y generadores. La relación entre flujo magnético  $\Phi$  a través de una trayectoria cerrada y la fuerza electromotriz  $\varepsilon$  alrededor de la misma trayectoria se denomina Ley de Faraday y en el caso de un circuito puede escribirse como:

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \quad (3.6)$$

La constante  $L$ , definida como la constante de proporcionalidad en la relación anterior, se denomina autoinductancia (generalmente se habla solo de inductancia). La ecuación (3.6) muestra que un cambio de la corriente a través de una inductancia induce una fuerza electromotriz proporcional a  $dI/dt$ , opuesta al cambio. El análogo mecánico de la inductancia es la masa: una inductancia se comporta como un objeto masivo cuya inercia se opone a cualquier cambio de la velocidad (análogo mecánico de la corriente eléctrica).

Al igual que un condensador almacena energía en el campo eléctrico, una inductancia puede almacenar energía en el campo magnético generado por el flujo de corriente eléctrica. Para introducir un valor de inductancia en un circuito se usan dispositivos diseñados para maximizar la interacción entre corriente eléctrica y campo magnético. El método más común es geométrico: se enrolla alambre conductor en forma de un solenoide de modo que las contribuciones al campo magnético de un alambre largo se concentran en un espacio pequeño. Si se agrega un núcleo de algún material con alta permeabilidad magnética, tal como el hierro o la ferrita, el valor de la inductancia aumenta. La unidad de inductancia es el Henry, abreviado H. Una corriente que cambia a razón de 1 A/s, induce una fuerza electromotriz de 1 V a través de una bobina de 1 H. Normalmente se usan submúltiplos tales como el  $\mu\text{H}$  y el  $\text{mH}$ .

### 3.3. Circuito RL

Aplicando las leyes de Kirchoff para el circuito de la figura 3.2 se obtiene:

$$V - I \cdot R - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (3.7)$$

Resolviendo esta ecuación, imponiendo como condición inicial la conexión del circuito ( $I(t = 0) = 0$ ), se obtiene la solución para la corriente:

$$I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \quad (3.8)$$

donde  $\tau = L/R$ . A partir de esta relación se puede obtener el valor en el tiempo de los voltajes sobre los diferentes componentes.

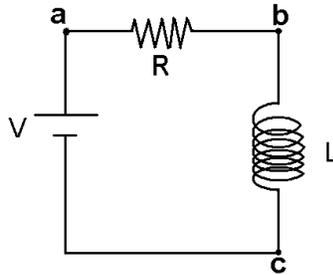


Figura 3.2: Circuito RL.

### 3.4. Osciloscopio

Desde ya se describen dos puntos que generan errores en el trabajo de laboratorio, con el fin de tenerlos en cuenta y evitarlos:

- a) Para medir una diferencia de potencial o voltaje, se mide entre dos puntos. Sin embargo, al medir con la punta de prueba del osciloscopio, sólo se toma un punto, ¿cuál es el otro? Los dos canales del osciloscopio tienen un retorno común. Eso significa que las partes de afuera metálicas, en la entrada de los conectores BNC, están conectadas entre los dos canales. Por lo tanto, con la punta de prueba se mide la diferencia de potencial entre la punta y el retorno del osciloscopio que está conectado al circuito a través del otro canal, mediante la banana que va al BNC que introduce la señal del generador. Este comentario es de gran relevancia, ya que permite entender qué es lo que está midiendo el osciloscopio.
- b) En el osciloscopio existen tres formas de visualizar: AC, *Ground* y DC. Siempre, antes de medir, se recomienda usar el modo *Ground* para centrar la señal sobre el eje X de la pantalla. Posteriormente al medir se elige AC o DC, dependiendo si se desea visualizar la parte alterna o continua de la señal.



# Unidad 4: Filtros de frecuencia

## 4.1. Estados transiente y estacionario

En el experimento de la guía 2 se estudió la respuesta transiente de un circuito RC, o sea, lo que ocurre durante el corto período de tiempo después que se ha aplicado un voltaje al circuito. Si se aplica un voltaje alterno y por lo tanto una corriente alterna (CA), en vez de un voltaje continuo, se observa una combinación de dos efectos: la respuesta transiente de corta duración y una de larga duración, que es la respuesta del estado estacionario. En esta ocasión se estudiará el estado estacionario.

En el estado estacionario son de particular interés las diferencias en amplitud y fase de los voltajes alternos a través de los elementos del circuito. Estas diferencias varían como una función de la frecuencia. En este experimento se estudiará la amplitud de los voltajes en el estado estacionario.

Considerar un circuito simple que consiste en una fuente de voltaje alterno, una resistencia y un condensador (Fig. 4.1). La ley de Kirchhoff de los voltajes se expresa:

$$\varepsilon_t = V_R + V_c \quad (4.1)$$

En el experimento de la guía 2 se vio que el tiempo requerido para cargar un condensador a un voltaje

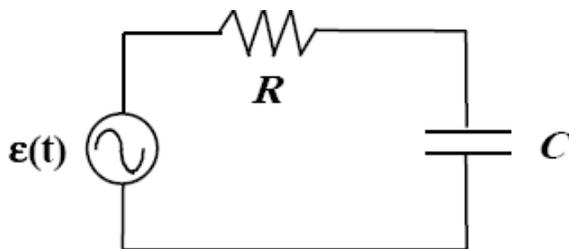


Figura 4.1: Circuito RC.

aplicado está dado por el tiempo característico  $\tau = RC$ . En el caso en que el período de oscilación  $T$  del voltaje alterno es corto ( $T \ll RC$ ), la polaridad del voltaje se invierte antes de que el condensador adquiera una carga significativa. Luego los voltajes deben depender de la frecuencia de la CA. Para calcular los valores de  $V_C$  y  $V_R$  en la respuesta de estado estacionario se usa el formalismo de impedancia.

## 4.2. Formalismo de impedancia

El formalismo de impedancia simplifica bastante el análisis, en comparación con la resolución por métodos generales de la ecuación diferencial del circuito (por ejemplo, la ecuación (4.1)). Sin embargo, sólo es aplicable a circuitos de CA con un forzamiento sinusoidal y en estado estacionario, o sea, después que la respuesta transiente ha disminuido a un nivel insignificante.

Primero se debe extender el concepto de resistencia para incluir condensadores e inductancias. Esta resistencia generalizada se denomina impedancia, se denota por  $Z$  y se define por la relación:

$$Z = \frac{V}{I} \quad (4.2)$$

El voltaje  $V$  y la corriente  $I$  son sinusoidales y pueden representarse en forma de exponenciales complejas como  $V(t) = V_0 \exp(i\omega t)$  e  $I(t) = I_0 \exp(i\omega t)$ , siendo  $i = \sqrt{-1}$ ,  $V_0$  y  $I_0$  las amplitudes y  $\omega$  la frecuencia angular. Las cantidades físicas medibles corresponden a las partes reales de este tipo de expresiones.

Con las consideraciones anteriores se encuentra que:

- a) Para una resistencia no hay cambio, su impedancia es :

$$Z_R = \frac{V_R}{I_R} = R \quad (4.3)$$

- b) Para un condensador se obtiene la impedancia utilizando la relación  $Q = CV_C$ . Suponiendo que  $V_C(t) = V_0 \exp(i\omega t)$ , se tiene:

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV_C}{dt} = i\omega CV_0 e^{i\omega t},$$

$$Z_C = \frac{V_C}{I} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{i\omega CV_0 e^{i\omega t}},$$

y por lo tanto,

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}. \quad (4.4)$$

Se observa que un condensador se comporta como un corto circuito ( $Z_C \rightarrow 0$ ) a frecuencias altas ( $\omega \rightarrow \infty$ ), y como un circuito abierto ( $Z_C \rightarrow \infty$ ) a frecuencias bajas ( $\omega \rightarrow 0$ ).

- c) Para una inductancia se obtiene la impedancia utilizando la relación  $V_L = LdI/dt$ . Suponiendo que  $I(t) = I_0 \exp(i\omega t)$ , se tiene

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = i\omega LI_0 e^{i\omega t},$$

$$Z = \frac{V_L}{I} = i\omega L.$$

Se observa que una inductancia se comporta como un corto circuito ( $Z_L \rightarrow 0$ ) a frecuencias bajas ( $\omega \rightarrow 0$ ), y como un circuito abierto ( $Z_L \rightarrow \infty$ ) a frecuencias altas ( $\omega \rightarrow \infty$ ).

Una conexión en serie de dos impedancias tiene una impedancia equivalente que es la suma de las dos impedancias, como en la combinación en serie de dos resistencias. Por ejemplo, la impedancia equivalente de una resistencia en serie con un condensador es  $R + 1/(i\omega C)$ . En general,  $Z_{\text{equiv}} = Z_1 + Z_2$ , pero como las impedancias son complejas, puede suceder que  $|Z_{\text{equiv}}| \neq |Z_1| + |Z_2|$ . De manera también análoga a la asociación de resistencias en paralelo, la impedancia equivalente de dos elementos en paralelo es  $Z_{\text{equiv}}^{-1} = Z_1^{-1} + Z_2^{-1}$ .

### 4.3. La respuesta estacionaria del circuito RC

Analizando el circuito de la Fig. 4.1 por el método de impedancias, la ley de Kirchhoff de los voltajes (ecuación (4.1)) se convierte en:

$$\varepsilon_t = V_R + V_C = I(Z_R + Z_C).$$

El circuito se reduce a un tipo de divisor de voltaje con dos elementos de impedancia en serie, parecidos a la combinación en serie de resistencias estudiada en el experimento de la guía 1. Entonces,

$$I = \frac{\varepsilon_t}{Z_R + Z_C}$$

y la caída de voltaje a través del condensador está dada por el análogo de la ley de Ohm,

$$V_C = IZ_C = \varepsilon_t \frac{Z_C}{Z_R + Z_C}.$$

Sustituyendo  $Z_C$  y  $Z_R$  de las ecuaciones (4.3) y (4.4),

$$V_C = \varepsilon_t \left( \frac{1/i\omega C}{R + 1/i\omega C} \right) = \varepsilon_t \left( \frac{1}{1 + i\omega RC} \right). \quad (4.5)$$

### 4.4. Filtros de frecuencia

El circuito en la Fig. 4.2-izquierda es igual al recién analizado, salvo que ahora se identifican  $\varepsilon_t$  con  $V_{in}$ , el voltaje de una señal de entrada, mientras que  $V_C$  se identifica como  $V_{out}$ , el voltaje de una señal de salida. Este circuito es un filtro pasa bajos, lo que se define como un circuito que “deja pasar” una señal de baja frecuencia sin alterar su amplitud ni su fase. La impedancia del condensador  $Z_C$  es grande para bajas frecuencias, entonces  $V_{in}$  pasa hacia  $V_{out}$  con poca atenuación. Al revés,  $Z_C$  es pequeño para frecuencias altas, así que las frecuencias altas son efectivamente bloqueadas en la salida. Lo que ocurre es que la señal de alta frecuencia es cortocircuitada a tierra (el punto c) por el condensador. (La división entre dominios de alta y baja frecuencia ocurre aproximadamente alrededor de  $\omega = 1/RC$ ). En este experimento interesa la magnitud de  $V_{out}$  en relación con  $V_{in}$ . De la ecuación (4.5):

$$\left| \frac{V_C}{\varepsilon_t} \right|^2 = \left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|^2 = \left( \frac{1}{1 + i\omega RC} \right) \left( \frac{1}{1 + i\omega RC} \right)^*$$

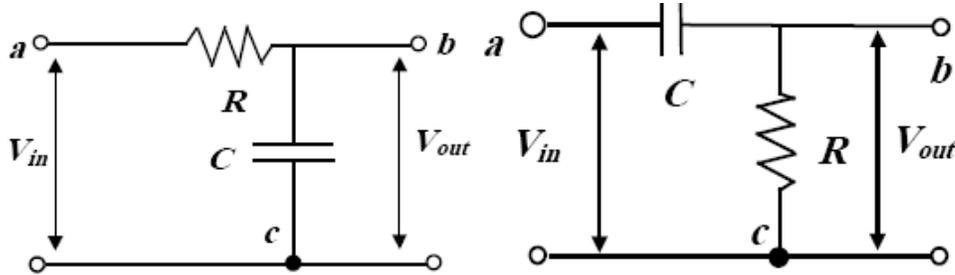


Figura 4.2: Izquierda: Filtro pasa bajos. Derecha: Filtro pasa altos.

Donde el asterisco (\*) representa el complejo conjugado. Entonces,

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \left| \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (4.6)$$

La razón  $T(\omega) = |V_{out}/V_{in}|$  dada por la ecuación (4.6) se llama la función de transferencia del filtro pasa bajos.

Ahora, cambiando al circuito de la Fig.4.2-derecha, se identifica  $V_R$  como el voltaje de salida  $V_{out}$ . Este circuito es un filtro pasa alto. Para altas frecuencias el condensador tiene una impedancia muy baja y casi no cae voltaje a través suyo. Por lo tanto,  $V_{out}$  es casi igual a  $V_{in}$ . A baja frecuencia, la impedancia del condensador es muy grande y casi todo el voltaje cae a través suyo, siendo  $V_{out}$  muy pequeño. Es decir, las frecuencias altas “pasan” a través del filtro, mientras las frecuencias bajas no. La magnitud  $V_{out}$  en relación a  $V_{in}$  es

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \left| \frac{Z_R}{Z_C + Z_R} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}},$$

donde

$$V_R = I Z_R = \varepsilon \left( \frac{Z_R}{Z_R + Z_C} \right)$$

## 4.5. El circuito LC

Este circuito consiste en una inductancia,  $L$ , y un condensador,  $C$ . Al plantear la ley de Kirchhoff para los voltajes se obtiene inmediatamente la ecuación diferencial que rige el sistema:

$$V_C + V_L = 0,$$

lo que equivale a

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0 &\iff \frac{Q}{C} + L \frac{d^2 Q}{dt^2} = 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 Q}{dt^2} &= -\frac{1}{LC} Q \end{aligned}$$

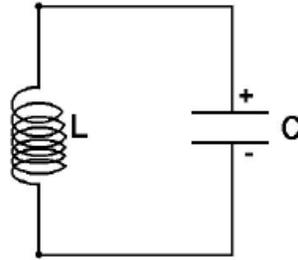


Figura 4.3: Circuito LC.

$$\Rightarrow Q(t) = Q_0 \cos(\omega_o t + \phi)$$

con

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC},$$

que es la frecuencia de resonancia del circuito LC.

El sistema LC es un oscilador eléctrico, análogo a su par mecánico, pero que transfiere energía desde el campo eléctrico del condensador hacia el campo magnético de la inductancia, y viceversa. Como no hay disipación vía una resistencia, estas oscilaciones son indefinidas, como las de un oscilador mecánico sin disipación, y su frecuencia de oscilación  $\omega_o$  es la frecuencia natural del circuito.

## 4.6. El circuito RLC y el factor de calidad

Si al circuito anterior se le agrega una resistencia en serie se forma un circuito RLC. En este caso, la resistencia hace que la energía del circuito se disipe térmicamente. Como consecuencia las oscilaciones se amortiguan (Fig. 4.4). Si se considera “E” como la energía total y “ $\Delta E$ ” la pérdida de energía por ciclo, se define el *factor de calidad*  $Q^*$  como:

$$Q^* = 2\pi \frac{E}{\Delta E}. \quad (4.7)$$

Esto significa que un circuito donde las pérdidas de energía sean pequeñas se puede considerar como de alta calidad ( $Q^* \gg 1$ ).

## 4.7. El circuito RLC forzado sinusoidalmente

Cuando se lo excita por una fuente de voltaje alterno sinusoidal, un circuito LRC se comporta como una combinación de circuitos RC y LR. La impedancia total es

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}, \quad (4.8)$$

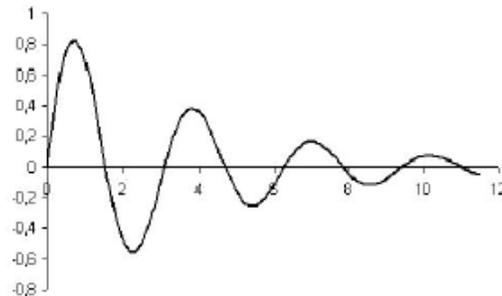


Figura 4.4: Oscilaciones amortiguadas.

cuya magnitud es

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (4.9)$$

A frecuencias bajas el circuito se comporta como uno RC, y a frecuencias altas, como un circuito RL. Por otra parte, para frecuencias cercanas a la frecuencia natural  $\omega_o$  del circuito LC, las contribuciones de la inductancia y del condensador a la impedancia total (ecuación (4.9)) se cancelan y la corriente queda limitada solo por la resistencia  $R$ : la corriente es  $I = V_{in}/R$ . Si  $R$  es suficientemente pequeño, la corriente puede ser muy grande en un intervalo estrecho de frecuencias cercanas a  $\omega_o$ . Este fenómeno se llama resonancia (ver Fig. 4.5).

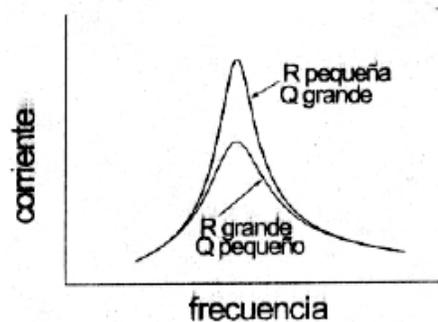


Figura 4.5: Curva de resonancia del sistema.

El voltaje a través de la inductancia a la frecuencia  $\omega_o$  es:

$$|V_L| = |IZ_L| = |I\omega_o L| = |V_{in}| \frac{\omega_o L}{R} \quad (4.10)$$

El voltaje a través del condensador,  $V_C$ , tiene la misma magnitud que  $V_L$  pero de fase opuesta, de manera que se cancelan. Cuando  $R$  es pequeño ( $R \ll \omega_o L$ ), los voltajes  $V_L$  y  $V_C$  pueden ser mucho más grandes que el voltaje de la fuente,  $V_{in}$ . La razón de voltajes  $|V_L|/|V_{in}|$  es una medida de la “calidad” del circuito resonante. De la ecuación (4.10) se ve que es igual a  $\omega_o L/R$ . Esto entrega otra forma de calcular el factor

de calidad  $Q^*$  definido en la ecuación (4.7),

$$Q^* = \omega_o \frac{L}{R}. \quad (4.11)$$

## 4.8. La respuesta transiente de un circuito RLC

Cuando se aplica bruscamente un voltaje al circuito LRC, hay tres posibilidades dependiendo de la resistencia en el circuito. Se define una resistencia crítica:

$$R_{crítica} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_C \quad (4.12)$$

se consideran los tres casos de  $R < R_C$ ,  $R = R_C$  y  $R > R_C$ .

a) Oscilaciones amortiguadas. Para  $R < R_C$ :

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau'} e^{i\Omega t} \quad (4.13)$$

La corriente en el circuito oscila sinusoidalmente con una amplitud que disminuye (ver Fig. 4.4) con un tiempo característico  $\tau'$ :

$$\tau' = 2\frac{L}{R} \quad (4.14)$$

La frecuencia  $\Omega$  depende de  $\omega_o$  y  $\tau'$ . Para resistencias bajas, en la práctica,  $\Omega \approx \omega_o$ . Esto implica que para el circuito  $LC$  ideal,  $R \rightarrow 0$  y  $\tau' \rightarrow \infty$ , el circuito oscila indefinidamente a su frecuencia natural  $\omega_o$ . El parámetro  $\tau'$  está relacionado con  $Q^*$  por

$$Q^* = \tau \frac{\omega_o}{2}. \quad (4.15)$$

b) Sobreamortiguamiento, también llamado *amortiguamiento supercrítico*: Para  $R > R_C$  la resistencia es tan grande que impide completamente las oscilaciones. La corriente decae exponencialmente con el tiempo en la forma  $I(t) = A \exp(-a_1 t) + B \exp(-a_2 t)$  donde  $a_1 = -1/\tau + (1/\tau^2 - \Omega_o^2)^{1/2}$  y  $a_2 = -1/\tau - (1/\tau^2 - \Omega_o^2)^{1/2}$

c) Amortiguamiento crítico. Es el caso límite entre los dos comportamientos. La resistencia  $R = R_C$  es suficiente para impedir las oscilaciones. La corriente decrece exponencialmente de una forma ligeramente diferente al caso sobreamortiguado:  $I(t) = (A + Bt) \exp(-t/\tau')$ .

## 4.9. El estado estacionario

Cuando el circuito se fuerza con un voltaje sinusoidal  $V_{in}(t) = V_o \exp(i\omega t)$ , la corriente será también sinusoidal  $I(t) = I_o \exp(i\omega t)$ . Su magnitud en estado estacionario es  $|I| = |V_{in}/Z|$  donde la impedancia total está dada por la ecuación (4.9). Esta pasa por un mínimo cuando se alcanza la frecuencia natural  $\omega_o$ .

Reemplazando este valor en la impedancia total se puede obtener la siguiente expresión para la corriente:

$$|I_o(\omega)| = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{\omega}\right)^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}. \quad (4.16)$$

Esta expresión tiene un máximo en  $\omega = \omega_o$ , que es la corriente de resonancia. En perfecta analogía con un oscilador armónico forzado, la resonancia ocurre cuando el circuito se excita por una fuente de voltaje alterno a la frecuencia natural de oscilación.

La “agudeza” de la resonancia tiene interés. Cuando  $R$  es pequeño, el máximo es agudo. Con valores mayores de  $R$ , el máximo es más ancho. Para  $R$  fijo, a los dos valores de  $\omega$  en que  $|\omega L - 1/\omega C| = R$ , la corriente  $I(\omega)$  decrece en el factor  $1/\sqrt{2}$  desde su valor máximo  $I(\omega_0)$ . Definiendo esas frecuencias como  $\omega_0 \pm \Delta\omega$  (ver figura 4.6) encontramos que  $\Delta\omega$  es aproximadamente

$$\Delta\omega = \frac{R}{2L}. \quad (4.17)$$

El ancho de la curva de resonancia está relacionado con los parámetros previamente definidos para definir las oscilaciones amortiguadas. Si se nota que:

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau'} \quad (4.18)$$

y

$$Q^* = \frac{\omega_o}{2\Delta\omega}, \quad (4.19)$$

se ve que hay un estrecho puente entre la resonancia y las oscilaciones amortiguadas que ocurren en la respuesta transiente del circuito.

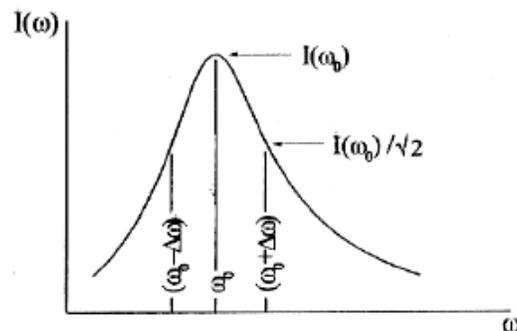


Figura 4.6: Ancho de la curva de resonancia.

# Unidad 5: Diodos

## 5.1. Semiconductores

Los átomos de los semiconductores son elementos ya sea del grupo IV de la tabla periódica, o de una combinación de los grupos III y V (llamados semiconductores III-V), o de una combinación de los grupos II y VI (llamados semiconductores II-VI). Por esta razón, comparten algunas propiedades que los hacen particularmente útiles en la electrónica moderna, como veremos a continuación.

Consideremos como ejemplo el silicio que es el semiconductor más utilizado. El silicio, un elemento del grupo IV de la tabla periódica, tiene cuatro electrones de valencia. Al agruparse con otros átomos de silicio, forma una red cristalina mediante enlaces covalentes con sus cuatro vecinos más cercanos, esto es, “compartiendo” un electrón con cada uno de sus cuatro vecinos. Esto se ilustra en la figura 5.1.

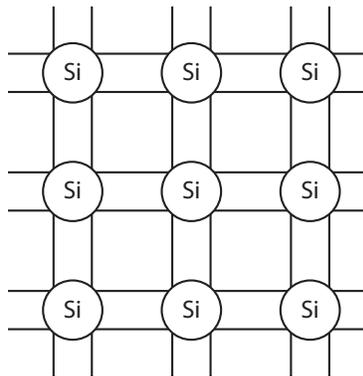


Figura 5.1: Red cristalina del silicio. Las líneas horizontales y verticales representan enlaces covalentes entre átomos vecinos.

Esto se contrasta con lo que ocurre con un metal, por ejemplo el cobre que es un elemento del grupo I y tiene solo un electrón de valencia. En la red cristalina, este electrón no está asociado a ningún enlace, por lo que se considera como un electrón “libre” o de conducción. En presencia de un campo eléctrico, los electrones libres se desplazan fácilmente, generando una corriente. En los semiconductores, todos los electrones de valencia están asociados a enlaces, por lo tanto no contribuyen fácilmente a la corriente eléctrica.

Para producir corriente en un material semiconductor es necesario que un electrón salga de un enlace

covalente, y esto requiere energía. Como los estados energéticos que pueden tomar los electrones están cuantizados, la cantidad de energía que se debe dar a un electrón debe ser suficiente para hacerlo “saltar” al estado energético siguiente. Los estados energéticos a los que debe saltar un electrón para conducir forman la banda de conducción, mientras que los estados energéticos más bajos, hasta los asociados a los enlaces, forman la banda de valencia. A la diferencia de energía entre la banda de conducción y la banda de valencia se le conoce como brecha energética (ver figura 5.2), y es característica de cada material. Por ejemplo, la brecha energética del silicio es de 1.11 eV, la del germanio, otro semiconductor, es de 0.67 eV, mientras que la del carbono (diamante) es de 5.5 eV<sup>2</sup>. Por convención, se considera aislantes a los materiales con brecha energética mayor que 3 eV.

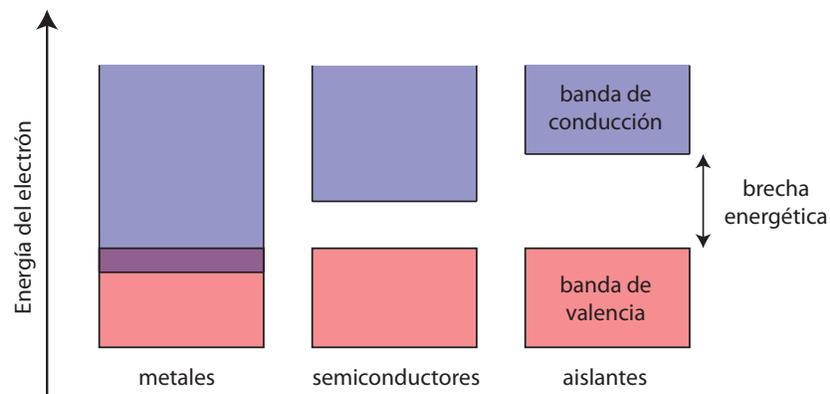


Figura 5.2: En los metales, la banda de valencia y la banda de conducción se superponen y por lo tanto son buenos conductores. En los materiales semiconductores y aislantes hay una brecha energética entre la banda de valencia y la banda de conducción, siendo la brecha mucho mayor en el caso de los aislantes.

Al entregar suficiente energía a un electrón para dejar un enlace covalente y saltar a la banda de conducción (por ejemplo aplicando un campo eléctrico suficientemente grande o mediante excitación térmica), el electrón puede contribuir a la conducción de corriente eléctrica. Al hacerlo, deja vacante un estado energético en el enlace, que puede ser utilizado por otro electrón. A los estados vacantes en la banda de valencia se le llaman “huecos” y se comportan para efectos prácticos como portadores positivos. Así, los electrones viajan en contra del sentido del campo eléctrico, mientras que los huecos viajan en el sentido de este.

## 5.2. Dopado

En un semiconductor puro, siempre habrá igual cantidad de huecos como electrones en la banda de conducción. Este equilibrio se puede alterar al introducir en el semiconductor átomos de un elemento con un electrón de valencia de más (lo que incrementa la cantidad de electrones de conducción) o de menos (lo que aumenta la cantidad de huecos). Este proceso se conoce como dopado.

<sup>2</sup>El “electrón-Volt” (eV) es una unidad de energía muy usada en algunas áreas de la física y representa la cantidad de energía necesaria para mover a un electrón a través de una diferencia de potencial de 1 V. En unidades del sistema internacional,  $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .

Si el semiconductor es dopado con un átomo del grupo V, con cinco electrones de valencia, entonces cuatro de esos electrones se ocupan en los enlaces con los átomos vecinos y el quinto queda en la banda de conducción. Así, el semiconductor tendrá más electrones de conducción. A este tipo de material se le conoce como semiconductor de tipo N pues tiene más conductores *negativos*.

Por el contrario, si el dopante es del grupo III, con solo tres electrones de valencia, entonces uno de los enlaces con los átomos vecinos quedará con un hueco. En este caso se habla de un semiconductor tipo P pues tiene exceso de huecos, o portadores *positivos*.

De manera general, llamamos *portadores mayoritarios* a los portadores que estén en mayor número en un semiconductor dopado, es decir, a los electrones en un semiconductor tipo N y a los huecos en un semiconductor tipo P. Por el contrario, llamamos *portadores minoritarios* a los portadores que están en menor número, es decir, a los huecos en un semiconductor tipo N y a los electrones en un semiconductor tipo P.

### 5.3. Juntura NP: el diodo

Un diodo es un dispositivo electrónico basado en una juntura NP, la cual consiste en una región donde se unen un semiconductor dopado tipo N y uno tipo P, como se muestra en la figura 5.3(a). Dado que el semiconductor tipo N tiene un gran número de electrones de conducción y el semiconductor tipo P tiene muchos huecos, los electrones libres y huecos difunden desde cada lado hacia la juntura, donde se recombinan. Esto hace que la juntura deje de ser neutra eléctricamente; hacia el lado N de la juntura se genera una carga neta positiva, mientras que del otro lado se acumulan cargas negativas. Esta distribución de cargas genera un campo eléctrico que impide que los electrones y huecos se recombinen en todo el espacio.

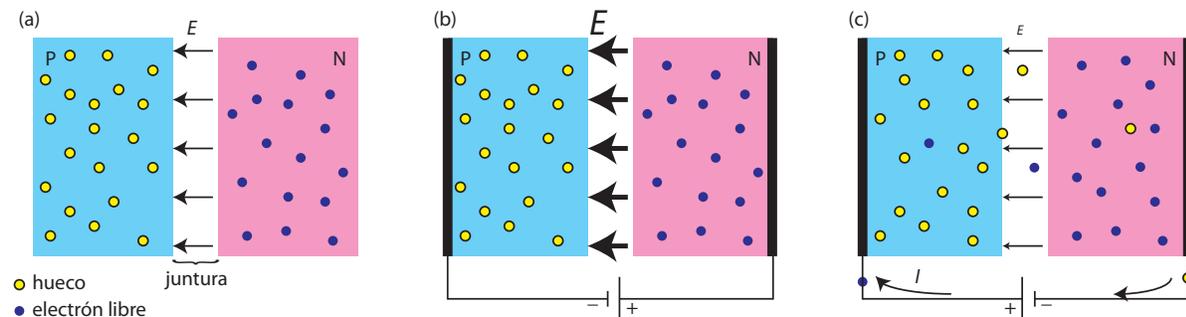


Figura 5.3: Juntura NP. (a) En la zona de unión no hay portadores libres, pues electrones de conducción y huecos se recombinan. Esto crea una distribución de carga y un campo eléctrico que impide el paso de portadores a través de la juntura. (b) Al aplicar un voltaje en inversa, el campo eléctrico en la juntura aumenta, y no se produce corriente eléctrica. (c) Al aplicar un voltaje en directa, el campo eléctrico en la juntura disminuye, permitiéndose el paso de los portadores de carga y generándose corriente.

El comportamiento del diodo en un circuito depende de la polaridad en que se conecte. Si el lado N del diodo se conecta a un mayor potencial que el lado P, entonces se genera un campo eléctrico en la

misma dirección que el campo de la juntura, como se muestra en la figura 5.3(b). Esto impide que los portadores de carga crucen la juntura y por lo tanto no se produce corriente eléctrica. En este caso se dice que el diodo está conectado *en polarización inversa*. Por el contrario, al conectar el polo P a un mayor potencial que el lado N, entonces el campo eléctrico generado por el voltaje externo disminuye el campo eléctrico de la juntura, lo que hace más fácil que huecos y electrones la crucen (figura 5.3(c)). Una vez cruzada la juntura, electrones libres y huecos se mueven en presencia del campo externo, generándose una corriente en el circuito. En este caso, decimos que el diodo está conectado *en polarización directa*.

Así, un diodo funciona como una válvula que permite el paso de la corriente solo en una dirección. La figura 5.4(a) representa el esquema de un diodo tal como se emplea en los diagramas de los circuitos. La flecha indica la dirección de la corriente según la convención estándar, o sea, una corriente positiva fluye desde los puntos del circuito de potencial más alto a los puntos de potencial más bajo. La figura 5.4(b) muestra el aspecto externo de un diodo. Hay una banda pintada en uno de los extremos del cilindro, para indicar la polaridad del diodo. La banda indica el frente del diodo, es decir, la corriente pasa desde el lado sin la banda hacia el extremo pintado.

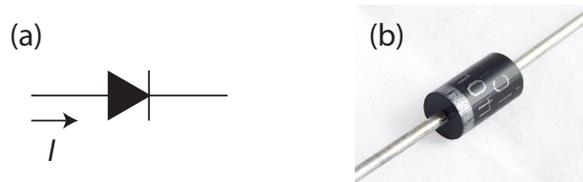


Figura 5.4: (a) Representación de un diodo. (b) Aspecto externo.

## 5.4. Circuito rectificador de media onda

Consideremos un circuito compuesto por un diodo y una resistencia conectados a un voltaje sinusoidal, como se muestra en la figura 5.5 (izquierda). Durante el semiciclo positivo del voltaje aplicado el diodo queda polarizado en directo, permitiendo el paso de la corriente a través de él. Si el diodo se considera como ideal, este se comporta como un cortocircuito, entonces toda la tensión aparecerá a través de la resistencia. En realidad, los diodos presentan una pequeña resistencia al paso de la corriente, por lo tanto habrá una caída de tensión a través del diodo. Además, en la realidad, un diodo requiere un voltaje mínimo para vencer el campo eléctrico de la juntura, por lo que no conducirá si el voltaje aplicado es demasiado pequeño.

Durante el semiciclo negativo, la corriente entregada por el generador de funciones querrá circular en sentido opuesto a la flecha del diodo. Si el diodo se considera como ideal entonces este actúa como un circuito abierto y no habrá flujo de corriente. Los diodos reales presentan una pequeña corriente de fuga al ser polarizados en inversa.

Si suponemos que el diodo es ideal, la forma de onda de salida de un rectificador de media onda será como se muestra en la figura 5.5 (derecha).

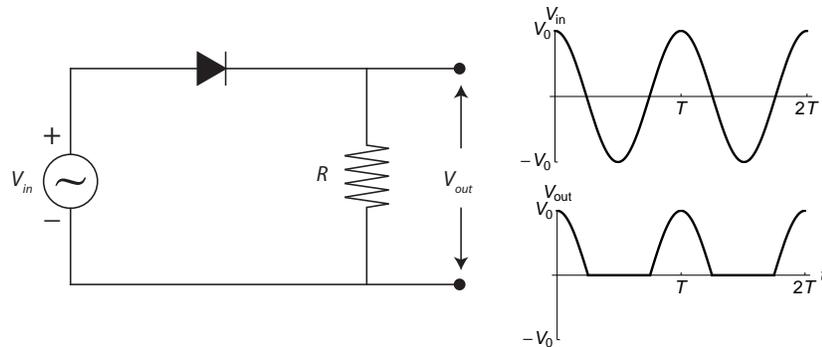


Figura 5.5: (Izquierda) Circuito rectificador de media onda. (Derecha) Voltaje de entrada ( $V_{in}$ ) y voltaje de salida ( $V_{out}$ ) del circuito de la izquierda.

#### 5.4.1. Efecto de un condensador en paralelo: suavización de la respuesta

Supongamos que al circuito anterior se le agrega un condensador en paralelo con la resistencia, como se muestra en la figura 5.6 (izquierda). Cuando el diodo conduce el condensador se carga al voltaje máximo  $V_{max}$ . Después de esto se descargará con una constante de tiempo  $\tau = RC$ . Si este tiempo es muy corto, entonces  $V_{out}$  será casi igual a  $V_{in}$ . Pero si  $C$  es suficientemente grande, el tiempo de descarga podría ser mayor a la mitad del período de voltaje de entrada, como se muestra en la figura 5.6 (derecha). El condensador no alcanza a descargarse completamente antes de ser cargado otra vez por el voltaje de entrada.

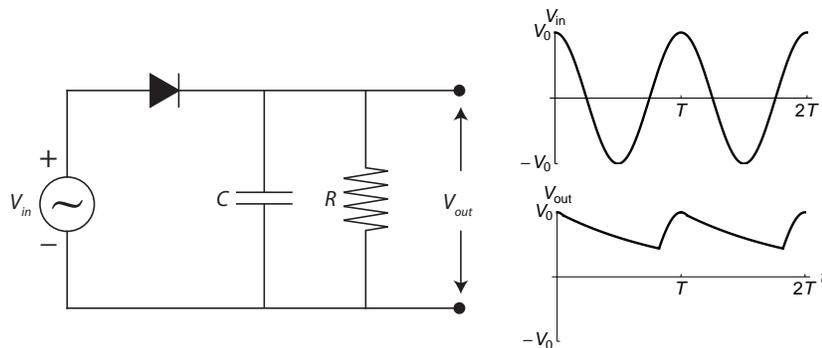


Figura 5.6: (Izquierda) Circuito rectificador de media onda con un condensador en paralelo. (Derecha) Voltaje de entrada ( $V_{in}$ ) y voltaje de salida ( $V_{out}$ ) del circuito de la izquierda.

### 5.5. Rectificador de onda completa con puente de diodos.

Un puente de diodos es un elemento formado por cuatro diodos conectados como se muestra en la figura 5.7. Entre los puntos “a” y “b” se introduce la señal de entrada. Los puntos “c” y “d” son las

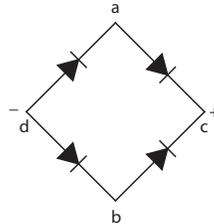


Figura 5.7: Puente de diodos.

salidas, indicando con un símbolo “+” o “-”, si es positiva o negativa. La forma física de un puente varía desde un cuadrado con un dibujo en su base igual a la figura, hasta un ordenamiento lineal de las salidas.

Para identificar los terminales en los cuadrados se rotula como + aquel donde confluyen las corrientes en polarización directa, el punto “c” en la figura. El punto opuesto (“d” en la figura) será el negativo y los otras dos (“a” y “b” en la figura) las entradas. En los puentes con ordenamiento de terminales de forma lineal, habitualmente se indica el “+”, en un extremo, en el centro las entradas y el “-” en el otro extremo.

El funcionamiento del puente de diodos en un circuito rectificador de onda completa se muestra en la figura 5.8 (izquierda). Los diodos  $D_1$  y  $D_3$  se polarizan en directo en el semiciclo positivo, durante el cual los diodos  $D_2$  y  $D_4$  están polarizados en sentido inverso. La situación se invierte durante el ciclo negativo. De esta manera, la corriente siempre pasará por la resistencia en el mismo sentido.

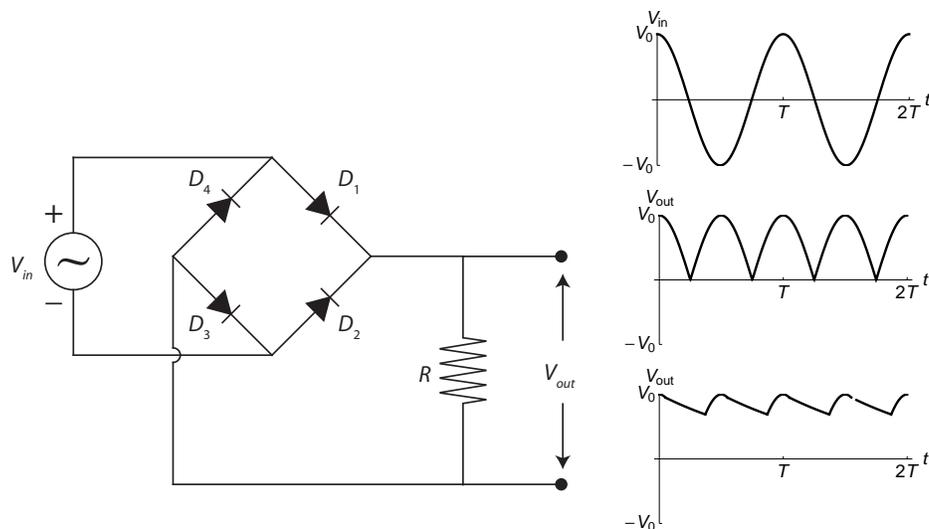


Figura 5.8: (Izquierda) Circuito rectificador de onda completa. (Derecha) Voltaje de entrada ( $V_{in}$ ) y voltaje de salida ( $V_{out}$ ) del circuito rectificador de onda completa y efecto de agregar un condensador en paralelo a la resistencia.

El voltaje de salida del circuito rectificador de onda completa se ilustra en la figura 5.8 (derecha). Al igual que en el circuito rectificador de media onda, al agregar un condensador en paralelo a la resistencia, el voltaje de salida se suaviza debido al proceso de carga y descarga del condensador.



# Unidad 6: Celdas fotovoltaicas

Una celda fotovoltaica es un dispositivo electrónico capaz de absorber radiación electromagnética y generar potencia eléctrica a partir de ella. Usando el sol como fuente de radiación, se convierte en un dispositivo capaz de entregar energía eléctrica de manera limpia a partir de una fuente de energía renovable.

## 6.1. Generación de par electrón-hueco

Las celdas fotovoltaicas basan su funcionamiento en el comportamiento de los materiales semiconductores. Hemos visto que un semiconductor tiene una brecha energética entre su banda de valencia y su banda de conducción. Esto significa que para poder conducir corriente eléctrica, es necesario aportar energía al material para remover a un electrón de un enlace covalente. Esto genera un electrón libre, capaz de moverse en presencia de un campo eléctrico, y un hueco, que se comporta como un portador de carga positiva que también puede contribuir a la corriente. A cada pareja electrón libre/hueco se le denomina *par electrón-hueco*.

Para generar un par electrón-hueco es necesario entregar energía al sistema. En particular, es necesario entregar al electrón, al menos, la misma energía de la brecha energética del material, para que el electrón pase de la banda de valencia a la banda de conducción. En el caso de las celdas fotovoltaicas, esta energía proviene de la luz.

## 6.2. Energía de los fotones

La luz está formada por partículas llamadas *fotones*, que se comportan tanto como partículas y como ondas. La energía de cada fotón depende de su longitud de onda, y esta, a su vez, determina el color de la luz. La energía de un fotón de longitud de onda  $\lambda$  está dada por

$$E = \frac{hc}{\lambda} = hf, \quad (6.1)$$

donde  $h$  es una constante llamada constante de Planck y  $c$  es la velocidad de propagación de la luz. En unidades del sistema internacional de medidas,  $h = 6.626 \times 10^{-34}$  J s y  $c \approx 3 \times 10^8$  m/s. En la última igualdad de la ecuación (6.1) se utilizó la propiedad de las ondas,

$$f\lambda = c, \quad (6.2)$$

con  $f$  la frecuencia de la onda. En el cuadro 6.1 se muestran los rangos establecidos por convención de los diferentes colores de la porción visible del espectro electromagnético.

color	longitud de onda (nm)	frecuencia (THz)	Energía (eV)
rojo	625–740	405–480	1.68–1.98
naranja	590–625	480–510	1.98–2.10
amarillo	565–590	513–530	2.10–2.19
verde	520–565	530–580	2.19–2.38
azul	450–520	580–670	2.38–2.76
añil	430–450	670–700	2.76–2.88
violeta	380–430	700–790	2.88–3.26

Cuadro 6.1: Rangos de longitud de onda, frecuencia y energía de los fotones del espectro visible.

Una celda fotovoltaica, entonces, es capaz de absorber un fotón, generándose un par electrón-hueco, si la energía del fotón es igual o mayor que la brecha energética del semiconductor. En el cuadro 6.2 se muestran las brechas energéticas de algunos semiconductores comunes. En el caso del silicio, la brecha energética es de 1.11 eV, por lo tanto, es capaz de absorber fotones en todo el espectro visible. El fosforo de aluminio en cambio, con una brecha de 2.45 eV, solo es capaz de absorber fotones suficientemente energéticos de color azul o de mayor energía.

semiconductor	brecha (eV)
germanio	0.66
silicio	1.11
arseniuro de galio (GaAs)	1.43
fosfuro de aluminio (AlP)	2.45

Cuadro 6.2: Brechas energéticas de algunos semiconductores comunes.

### 6.3. Mecanismo de operación

Una celda fotovoltaica consiste en dos capas, una de un semiconductor dopado tipo N y otra de un semiconductor dopado tipo P, formando una juntura NP, como se muestra en la figura 6.1. Al ser expuesta a la luz, la absorción de fotones genera pares electrón-hueco en la capa superior, también llamada *emisor*. Si la capa superior es suficientemente delgada, entonces el portador minoritario puede difundir hacia la juntura NP, donde el campo eléctrico de la juntura envía al portador minoritario hacia la segunda capa de la celda, también llamada *base*, donde pasa a ser un portador mayoritario.

Este proceso genera cargas de conducción que pueden usarse para generar corriente eléctrica. En particular, si se cierra el circuito con una carga (por ejemplo una resistencia, o un computador), entonces los portadores mayoritarios generados en el emisor pasan por la carga para luego recombinarse en la base.

Para ejemplificar, supongamos que la base está formada por un semiconductor dopado tipo P y el

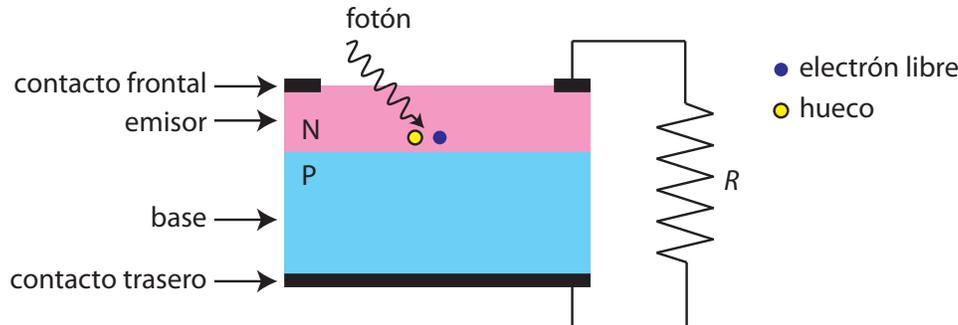


Figura 6.1: Esquema de una celda fotovoltaica. Se ejemplifica con una base tipo P y un emisor tipo N, pero puede ser a la inversa.

emisor por uno tipo N, como se ilustra en la figura 6.1. El emisor, al absorber un fotón suficientemente energético, genera un par electrón-hueco. El portador minoritario, en este caso el hueco, se mueve por difusión hasta la juntura, donde el campo eléctrico lo envía hacia la base. Puesto que en la base hay un exceso de huecos, entonces no habrá recombinación. Si la celda está desconectada, entonces el efecto de este proceso es que la base se carga positivamente y el emisor se carga negativamente. Este desequilibrio de carga se traduce en un voltaje a través de la celda. Si la celda se conecta en un circuito, entonces circulará corriente eléctrica.

#### 6.4. Voltaje de circuito abierto y corriente de corto circuito

Consideremos una celda fotovoltaica expuesta a la luz solar, pero no conectada a ningún circuito de carga, es decir, en circuito abierto. Como vimos, la absorción de fotones genera portadores de carga que se acumulan en la base y el emisor. Esto causa un desequilibrio de cargas, con la consecuente generación de un campo eléctrico y por lo tanto un voltaje a través de la celda. Este proceso no continúa indefinidamente, debido a que el campo eléctrico producido por las cargas se opone al campo de la juntura, haciéndola más débil. Eventualmente, el campo eléctrico de la juntura se anula, lo que impide que los portadores minoritarios sean transportados hacia la base, por lo que los nuevos pares electrón-hueco se recombinan.

En el estado estacionario, entonces, se crea un voltaje en la celda que se conoce como *voltaje de circuito abierto*,  $V_{oc}$ , y que es el máximo voltaje que la celda puede producir para un nivel dado de intensidad de luz incidente.

Supongamos ahora que la celda se conecta en corto circuito. Entonces, las cargas circularán inmediatamente desde la base al emisor y viceversa a través del cable, generándose una corriente. En una celda fotovoltaica ideal, por cada fotón absorbido se genera un par electrón-hueco que contribuye a la corriente. La corriente queda limitada tan solo por la tasa de generación de pares electrón-hueco, la que a su vez depende de la cantidad de fotones que inciden sobre la celda. Así, la corriente de corto circuito de la celda,  $I_{sc}$  es proporcional a la intensidad de la radiación incidente y al área de la celda, y es la máxima

corriente que se puede extraer de la celda para un nivel dado de intensidad de luz incidente.

## 6.5. Curvas $IV$ y $PV$ de una celda fotovoltaica

La curva de corriente versus voltaje o  $IV$  permite visualizar el comportamiento de una celda fotovoltaica. Una curva  $IV$  típica de una celda fotovoltaica se ilustra esquemáticamente en la figura 6.2. En corto circuito, el voltaje a través de la celda es nulo mientras que la corriente es máxima,  $I_{sc}$ . A medida que aumenta el voltaje en la celda, la corriente disminuye. Cuando el voltaje en la celda es igual al voltaje de circuito abierto,  $V_{oc}$ , entonces la corriente es nula.

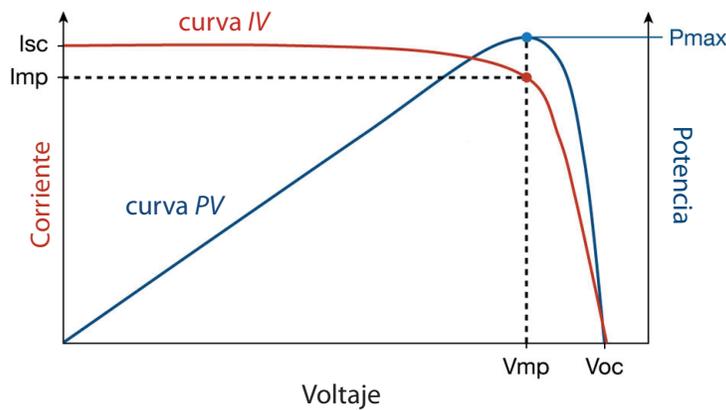


Figura 6.2: Curvas  $IV$  y  $PV$  de una celda fotovoltaica.

A partir de la corriente y voltaje entregados por la celda es posible obtener la potencia entregada por esta. Una curva de potencia versus voltaje, o curva  $PV$ , típica se muestra esquemáticamente en la figura 6.2. La potencia entregada por la celda es nula si la corriente o el voltaje son ceros. La curva de potencia alcanza un máximo,  $P_{max}$ . El voltaje y la corriente a los que se obtiene la máxima potencia se denominan  $V_{mp}$  e  $I_{mp}$ , es decir,

$$P_{max} = I_{mp} V_{mp}. \quad (6.3)$$

Dado que  $I_{mp} < I_{sc}$  y  $V_{mp} < V_{oc}$ , se tiene que siempre  $P_{max} < I_{sc} V_{oc}$ .

El voltaje  $V_{mp}$  y la corriente  $I_{mp}$  definen la resistencia característica de la celda fotovoltaica,

$$R_c = \frac{V_{mp}}{I_{mp}}, \quad (6.4)$$

que corresponde al valor de la resistencia de carga para el cual se extrae la máxima potencia posible de la celda fotovoltaica.

# Unidad 7: Tarjeta de adquisición

## 7.1. Conversión analógica-digital

En ingeniería y ciencias se trata constantemente con señales analógicas, como la fuerza aplicada sobre un pilar, la tensión de la red eléctrica, la velocidad de un flujo hidrodinámico, etc. Estas señales que varían continuamente en el tiempo son analizadas y medidas a través de diversos instrumentos, que pueden ser analógicos o digitales. Los primeros hacen medidas en base a respuestas obtenidas a partir de la señal eléctrica original, como el movimiento de una aguja en un amperímetro como respuesta al campo magnético producido por una corriente directa. Los instrumentos digitales, por otro lado, tales como el multímetro y el osciloscopio digital, transforman las señales eléctricas a un conjunto finito de datos para que estos sean procesados. Para hacer eso, las señales son discretizadas usando diferentes parámetros. Principalmente ellos son:

- La frecuencia de muestreo, también llamada frecuencia de adquisición o “sampling frequency” en inglés, es la cantidad de muestras por segundo que se toman de la señal analógica para su conversión digital. Es entonces el inverso del intervalo temporal que hay entre dos medidas consecutivas de una señal. Como ejemplo, si un instrumento tiene una frecuencia de muestreo de 10 kS/s (10 kilo “samples” por segundo), o también denotado como de 10 kHz, entonces es capaz de medir 10 000 datos en un segundo. A veces esta frecuencia de muestreo es fija, y otras veces es variable, es decir controlable por el usuario, pero con una cota superior, la cual está indicada en la documentación del instrumento.
- La resolución de la tarjeta es la diferencia mínima entre dos diferencias de voltaje de la señal digitalizada. Este valor está asociado directamente a los valores máximo y mínimo que se desea medir y a la cantidad de información que puede guardarse en cada medida (bits). Por ejemplo, un instrumento de 8 bits divide el rango máximo de medida en  $2^8 = 256$  “pedazos”, o datos posibles discretos. Así, para un rango de 10 V, para un instrumento que mide entre  $-5$  y  $+5$  V, la resolución será de  $10/256 \text{ V} \approx 0,039 \text{ V}$ . Una manera equivalente de expresarlo es que se mide el valor absoluto entre  $0$  y  $5$  V, usando 7 bits en lugar de 8, o sea con  $2^7 = 128$  datos, pero se guarda un bit para el signo ( $+$  o  $-$ ). Esto puede hacerse para cualquier número  $N$  de bits. En este caso se divide el rango de medición entre  $-2^{N-1}$  y  $+2^{N-1} - 1$  en escala binaria.

La figura 7.1(a) muestra una oscilación de una señal de voltaje periódica de 50 Hz, que varía entre  $-1$  y  $+1$  V. La figura 7.1(b) muestra su conversión digital (círculos rojos) con una frecuencia de adquisición

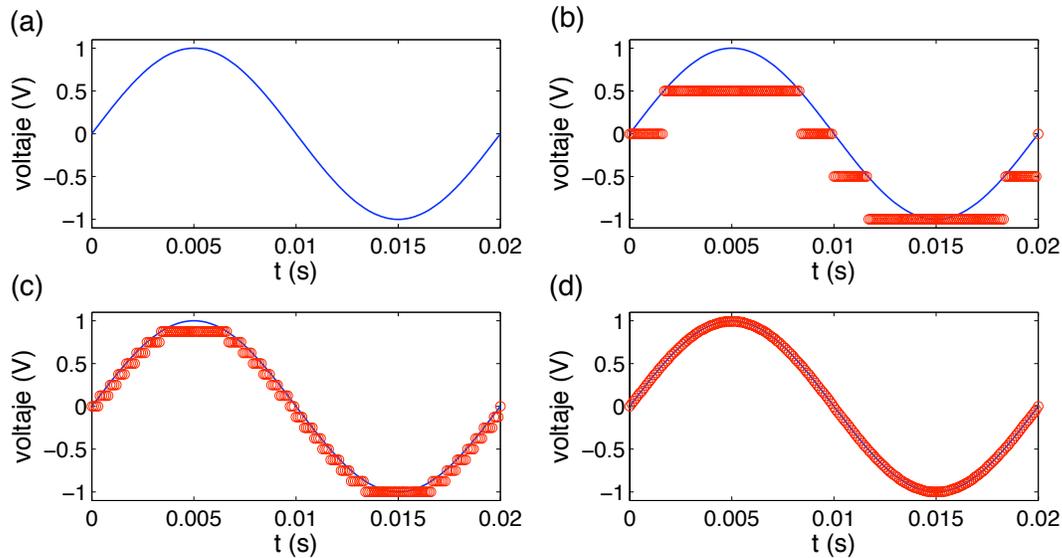


Figura 7.1: Ejemplos de conversión analógica/digital (círculos rojos). La figura (a) muestra la señal real con una curva continua (línea azul), que corresponde a una oscilación sinusoidal a 50 Hz entre  $-1$  y  $+1$  V. Las figuras (b), (c) y (d) muestran la conversión usando  $N = 2, 4$  y  $8$  bits respectivamente.

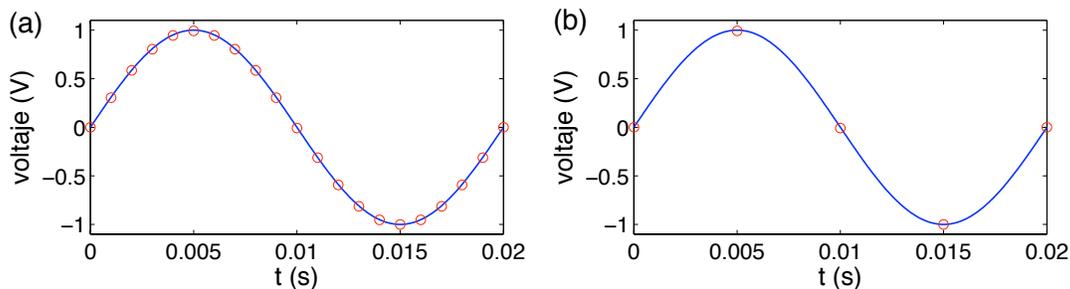


Figura 7.2: Ejemplos de conversión analógica/digital (círculos rojos) de la misma señal real de la figura 7.1. En ambos casos se usa  $N=8$ . (a) y (b) muestran el uso de frecuencias de muestreo de 1 kHz y 200 Hz respectivamente.

de 10 kHz pero usando  $N = 2$  bits, es decir  $2^2 = 4$  valores posibles. Las figuras 7.1(c) y 7.1(d) muestran conversiones similares pero con  $N = 4$  y  $N = 8$  bits, es decir, 16 y 256 valores posibles. Es claro a partir de estos ejemplos que cuando  $N$  es mayor, la aproximación de la señal real continua por una digital es mejor.

Vale la pena mencionar que en estos casos se ha supuesto que el instrumento tiene como rango de medida  $-1$  a  $+1$  V, pero en una medida real podría ocurrir (y en general es así) que la señal sea de una cierta amplitud  $A$  pero que la escala del instrumento es entre un valor  $-B$  y  $+B$  de voltaje. La cuantificación, o digitalización, de la señal se hace en la escala del instrumento, no automáticamente

según la escala de la señal. Es por ello que es importante tratar de ajustar la escala del instrumento (cuando es posible) a una lo más cercana posible, pero mayor, a la de la medida.

Las figuras 7.2(a) y 7.2(b) muestran la señal analógica (círculos rojos) en comparación con la señal real (línea azul) usando  $2^8$  valores posibles, pero con frecuencias de muestreo (o adquisición) de 1 kHz y de 200 Hz respectivamente. En el primer caso el tiempo entre medición es de  $1/1000 \text{ s} = 1 \text{ ms}$ , es decir hay 20 intervalos entre el primer y último dato (por lo tanto 21 datos). En el segundo caso este tiempo es de  $1/200 \text{ s} = 5 \text{ ms}$ , por lo que hay 4 intervalos entre el primer y último dato (5 datos en total).

En este curso, el paso de una señal analógica a digital, se realizará con el uso de una tarjeta de adquisición marca National Instruments, modelo USB-6008, y un programa de adquisición de datos llamado SignalExpress. La tarjeta tiene una frecuencia máxima de muestreo de 10 kHz, y es de 12 bits. Encontrará más detalles de esta tarjeta en su documentación publicada en la página del curso.

## 7.2. Submuestreo de una señal: *Aliasing*

Un fenómeno importante a considerar respecto al uso de la tarjeta de adquisición es el hecho de no usar una frecuencia alta comparada con la frecuencia de la señal que se quiere medir. Si esto ocurre se observará el fenómeno de submuestreo: aparecerá en la medida una señal de mucho menor frecuencia que la de la señal real. Una ilustración de esto se muestra en la figura 7.3. La señal continua de 50 Hz es la curva azul. Si se mide esta señal con una frecuencia cercana, se medirá una señal ficticia de frecuencia menor a la real. En los ejemplos de esta figura, las frecuencias de muestreo de 60 y 55.56 Hz (símbolos rojo y verde respectivamente) producen señales ficticias de 10 y 5.56 Hz respectivamente.

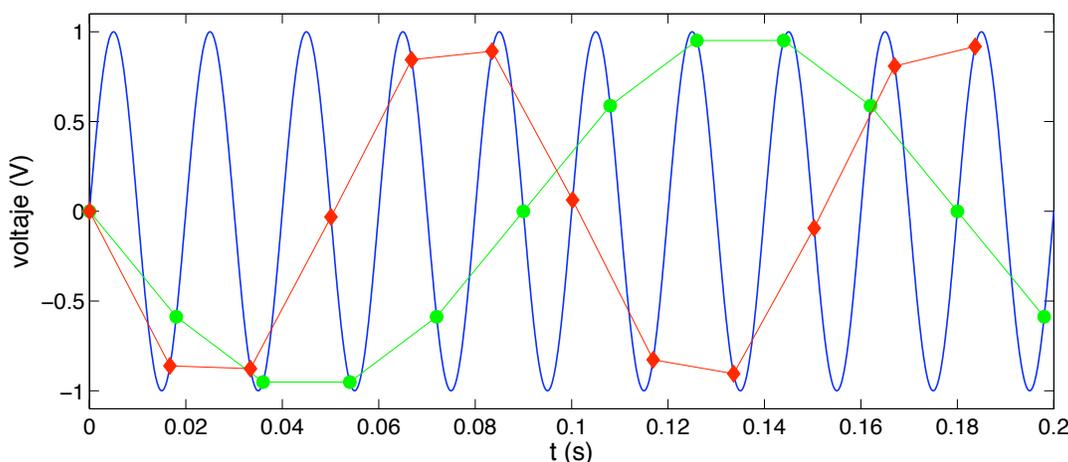


Figura 7.3: Ejemplo de submuestreo de una señal. La señal original de 50 Hz se muestra en azul. Los datos con símbolos en rojo y verde corresponden a frecuencias de muestreo de 60 y 55.56 Hz respectivamente.

### 7.3. Impedancia de entrada de una tarjeta de adquisición

Ya se ha mencionado que un instrumento digital tiene una frecuencia de muestreo y una capacidad de conversión digital dada por la cantidad de bits en la cual divide la señal. Otra característica importante, y de cualquier instrumento de medición, es su impedancia de entrada. Hemos discutido en guías anteriores que cuando se trata de señales sinusoidales la impedancia de un elemento es como una resistencia, salvo que compleja, la que cuantifica la relación entre voltaje y corriente. Para que un equipo sea un buen instrumento de medida éste debe perturbar lo menos posible el circuito al cual se conecta. En el caso de un amperímetro, que debe ser conectado en serie, su resistencia interna debe ser casi nula. En el caso de un voltímetro o un osciloscopio que se conecta en paralelo, éste debe tener una impedancia alta para perturbar lo menos posible el circuito. La tarjeta de adquisición que se usará en la guía práctica funciona como un voltímetro que puede hacer medidas discretas con un intervalo de tiempo dado. Ésta tiene una impedancia de entrada del orden de  $144\text{ k}\Omega$ , lo cual es bastante bajo comparado con los  $10\text{ M}\Omega$  que tiene la mayoría de los osciloscopios más básicos. Esto significa que esta tarjeta no puede ser usada para hacer medidas en circuitos con altas impedancias pues la corriente va a preferir pasar por la tarjeta en lugar de seguir pasando por el circuito. Esto explica por qué las resistencias son bajas en el circuito a estudiar.

### 7.4. Uso de la tarjeta de adquisición

Para registrar una señal temporal continua en el tiempo se usará una tarjeta de adquisición NI-USB6008. El manual de la tarjeta está en la página del curso.

Lo primero que se debe hacer para comenzar a usar de la tarjeta de adquisición es conectarla y verificar que ella está adquiriendo correctamente los datos de la señal analógica que se desea digitalizar. Se usará la tarjeta principalmente para medir una o más señales de voltaje. Como se explicó en guías anteriores, lo que se mide es la diferencia de voltaje entre dos puntos de un circuito, por ello hay dos formas de medir esta diferencia.

- Modo simple (RSE): En el modo simple se toma la diferencia de potencial entre la entrada y un punto donde el potencial es 0, llamado “tierra” o “ground”. En la tarjeta las posibles entradas se llaman AI#, donde # va desde 0 hasta 7.
- Modo diferencial (Differential): En el modo diferencial, se toma la diferencia entre dos entradas en la tarjeta, por ejemplo, AI0 y AI4 o AI1 y AI5, etc.

Para verificar el correcto funcionamiento de la tarjeta se usará el programa *Measurement and Automation*, ubicado generalmente en la carpeta *National Instruments*, como se muestra en la figura 7.4. Con este programa se puede comprobar que la tarjeta de adquisición está funcionando y probar diferentes frecuencias de muestreo, número de datos y valores máximos y mínimos de adquisición.

Al abrir la Barra del Menú Principal, seleccione *Configuration*, luego *Devices and Interfaces*, luego *NI-DAQmx* y finalmente *NI USB-6008*: “Dev n”, siendo n un número, normalmente 1. Seleccione *Self-Test*, la respuesta debe ser “The device has passed the self-test”, de otra forma existe un problema de

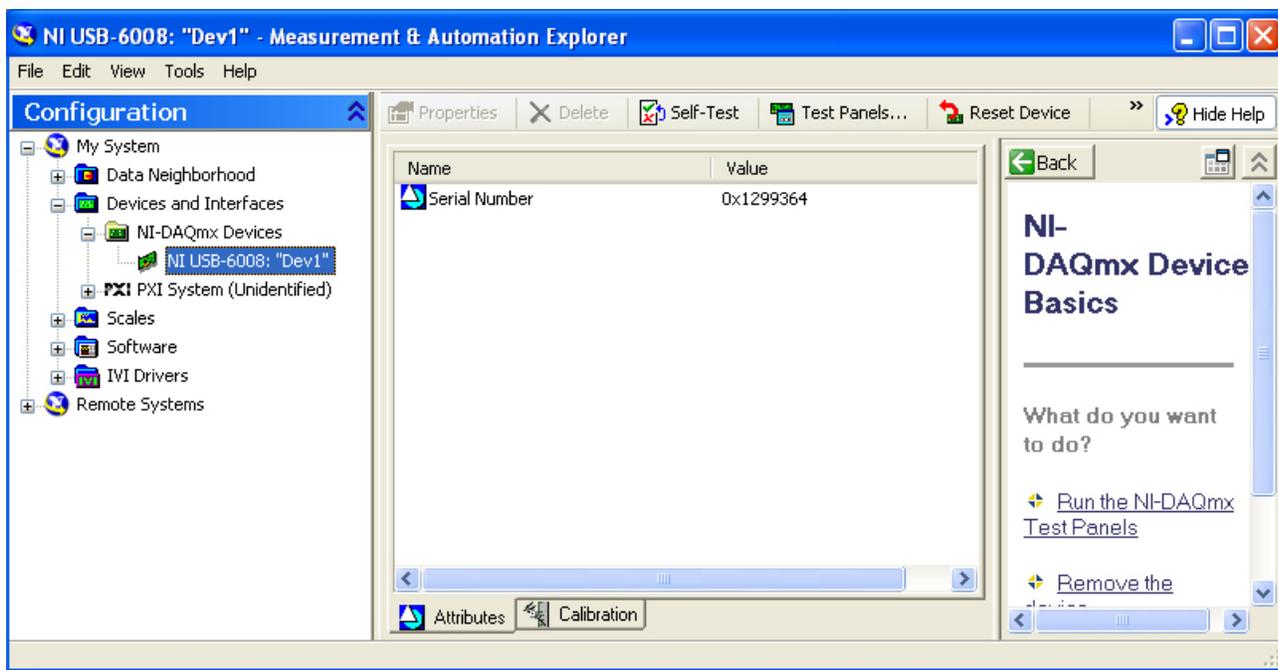


Figura 7.4: Measurement and Automation.

conexión o de configuración (pida ayuda a un profesor auxiliar en este caso). Para realizar una medida con la tarjeta seleccione *Analog Input*. Se sugiere usar los siguientes parámetros de adquisición:

- Mode: Continuous
- Max Input Limit: +10 V, Min Input Limit: -10 V
- Configuration: RSE
- Channel Name: AI0 o a elección
- Rate (Hz): 1000 o a elección
- Samples to read: 1000 o a elección

Lance la medida presionando sobre el botón *Start*. Como un ejemplo puede medir con la tarjeta el voltaje de la salida analógica del generador de funciones.

## 7.5. Programa de adquisición de datos: SignalExpress

Ahora se verificará que el programa *SignalExpress* funciona adecuadamente. Con esta aplicación se pueden hacer diversas operaciones con señales de voltaje y grabarlos en su PC en formato de un archivo

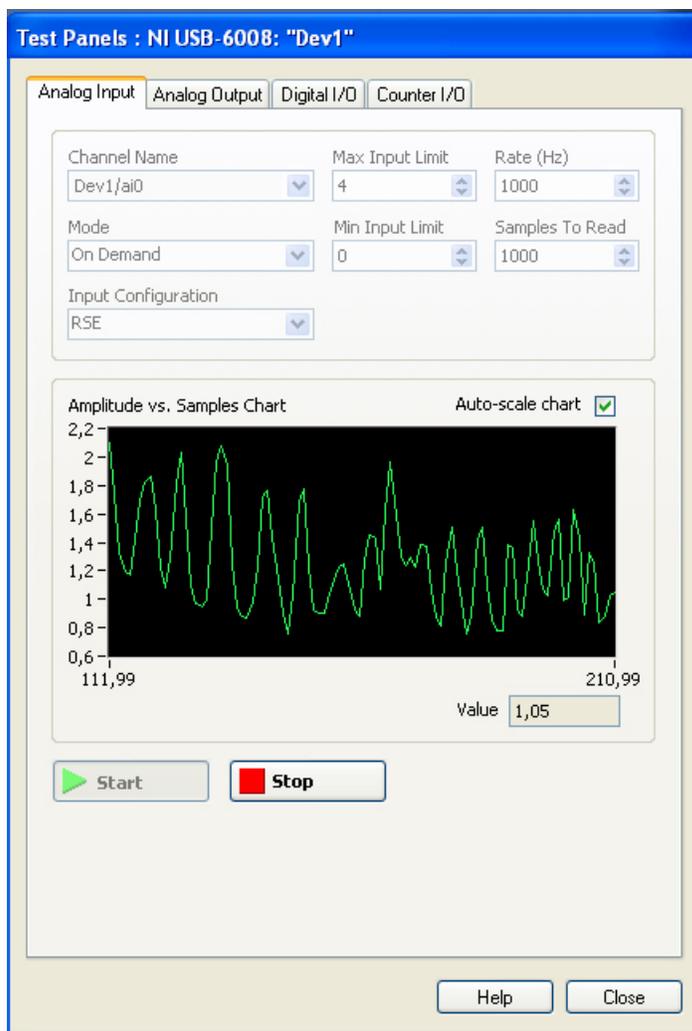


Figura 7.5: Test Panel de Measurement and Automation.

de texto.

Abra el programa, que está en la carpeta *National Instruments*. Para adquirir señales, agregue la botonera *DAQmx Acquire* usando *Add Step* o el botón derecho del ratón como muestra la Fig. 7.6 y seleccione las entradas que desea (una para modo simple o más para modo diferencial). Así puede configurar los parámetros de la adquisición, como máximo y mínimo de voltaje, número de datos a adquirir o frecuencia de muestreo. Con las botoneras *Analog Output* y *Analog Input* se configuran las salidas y entradas de una manera muy similar a lo que se hace con el programa *Measurement and Automation* que usó en el curso Sistemas Newtonianos (Figuras 4 y 5).

Se pueden realizar operaciones matemáticas con las señales adquiridas por la tarjeta, usando las botoneras *Arithmetic* o *Statistics*. En las figuras 7 y 8 se dan ejemplos de adquisiciones de dos señales

y de operaciones. En la figura 9 se muestra un ejemplo de análisis estadístico. A veces conviene hacer medidas diferenciales entre dos señales, por lo que se hace la simple resta entre ellas. También se puede calcular algunas propiedades estadísticas de las señales, como sus desviaciones estándar o promedios, como se muestra en las figuras 7.8 y 7.9. Para mayor información sobre diversos usos y aplicaciones de SignalExpress, pueden ver el video demostrativo en el sitio <http://zone.ni.com/wv/app/doc/p/id/wv-325>

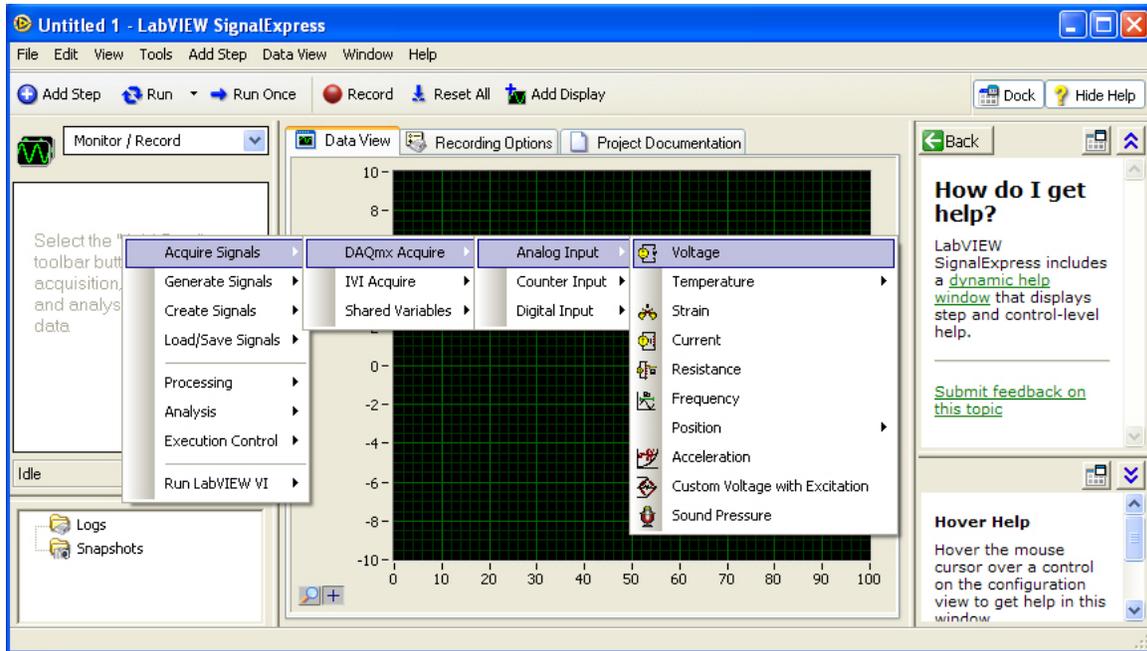


Figura 7.6: Adquisición de datos con SignalExpress.

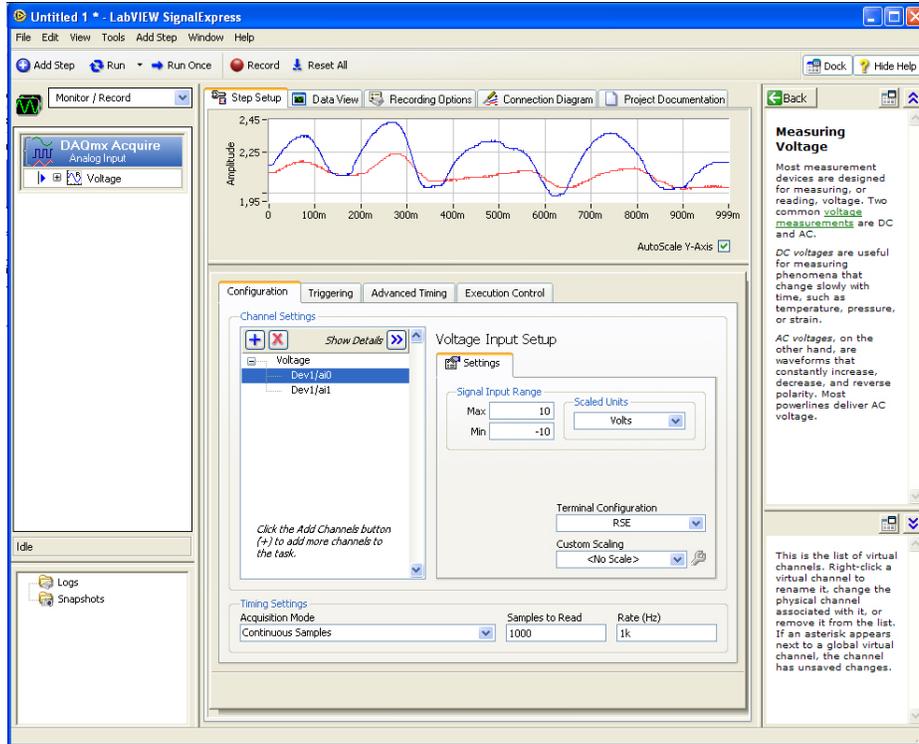


Figura 7.7: Adquisición de dos señales.

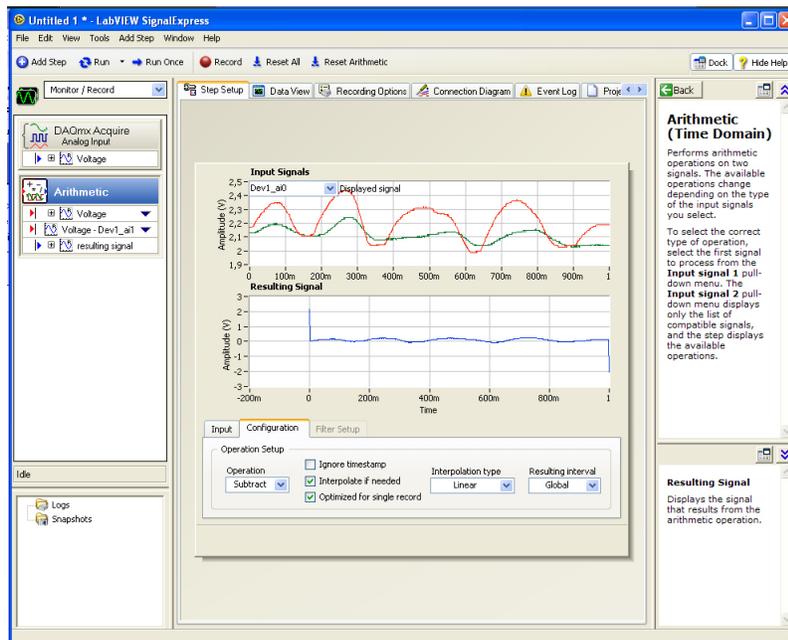


Figura 7.8: Operaciones Aritméticas con SignalExpress.

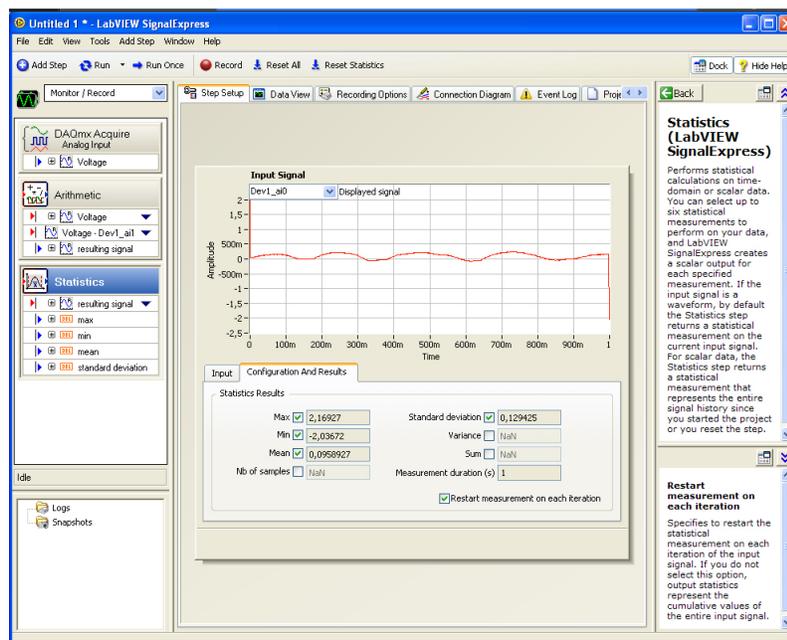


Figura 7.9: Estadística con SignalExpress.



# Unidad 8: Análisis de Fourier

## 8.1. Fundamentos de elasticidad lineal

El concepto de sólido rígido es válido como una aproximación, muy útil para estudiar ciertos fenómenos donde la eventual deformación del sólido es poco importante. Específicamente, un sólido rígido se define como un material donde cada par de elementos que lo componen está separado por una distancia que no cambia en el tiempo.

Sin embargo, los sólidos sí pueden deformarse. Lo más simple es considerar sólidos homogéneos e isotrópos. La primera condición se refiere a que las propiedades mecánicas del sólido, como rigidez o densidad, son iguales en todas partes. La segunda condición se refiere a que estas propiedades son iguales independientemente del *ángulo* con el que se mira el sólido.

Entonces, la elasticidad lineal de sólidos homogéneos e isotrópos describe las posibles deformaciones en el límite de desplazamientos muy pequeños de los elementos que componen el material con respecto a las dimensiones características de éste. Se define usualmente el vector desplazamiento

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r},$$

donde  $\vec{r}'$  es la nueva posición de un elemento que se encontraba originalmente en una posición  $\vec{r}$ . Luego, la condición para que la elasticidad lineal sea válida es que para todo  $\vec{r}$  que describa un elemento del material, entonces  $|\vec{u}| \ll L_x, L_y, L_z$ , donde  $L_x, L_y$  y  $L_z$  corresponden a las dimensiones espaciales del material. Es importante notar que al igual que para el modelo de una cuerda, se considera al sólido como un medio continuo ( $\vec{r}$  es una variable real) de manera que existen muchos elementos (átomos) en un elemento de volumen, el cual es pequeño comparado con el sólido y que tiene posición  $\vec{r}$  tal que tiene sentido definir cantidades físicas para este elemento.

Se define el esfuerzo aplicado sobre un material como la fuerza aplicada por unidad de área. El esfuerzo puede ser de compresión, de estiramiento, o de cizalle<sup>3</sup>. Las posibles combinaciones de los esfuerzos posibles, como también los resultados de las deformaciones inducidas, hacen que el tratamiento matemático de un sólido elástico sea bastante más complejo que el de una simple cuerda bajo tensión. Luego, por el momento no se detallará la descripción matemática de un sólido elástico.

Un ejemplo sencillo que puede ser abordado es el de la deformación homogénea de un sólido como el que se muestra en la figura 8.1. Inicialmente las dimensiones de este paralelepípedo son  $L_x, L_y$  y  $L_z$ .

---

<sup>3</sup>El simple hecho de romper un papel es un ejemplo de un esfuerzo de cizalle — también conocido como esfuerzo de corte — es tan grande que el material se fractura, se rompe, donde la elasticidad lineal ha dejado de ser válida por supuesto.

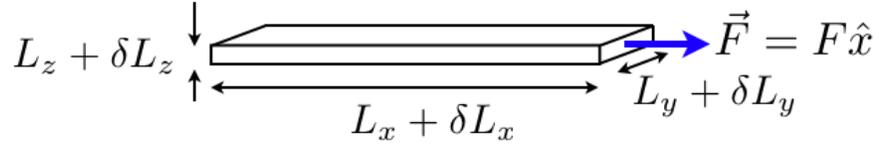


Figura 8.1: Esquema de un sólido elástico que se estira con un esfuerzo  $F/A$ , donde  $F$  es la fuerza aplicada y  $A$  el área sobre el cual se aplica. El sólido elástico se estira una distancia  $\delta L_x$  a lo largo de la dirección del esfuerzo. En principio, el sólido debe modificar sus otras dimensiones también.

Se aplica entonces un esfuerzo de tipo estiramiento tal que  $L_x \rightarrow L_x + \delta L_x$ , con  $\delta L_x \ll L_x$ . Si en cambio se aplica un esfuerzo de compresión, solo hay que cambiar  $\delta L_x$  por  $-\delta L_x$ .

Dos preguntas muy simples son entonces: i) ¿Cuál es el valor de  $\delta L_x$ ? ii) ¿Qué pasa en las direcciones transversales al estiramiento? Las respuestas son relativamente simples, aunque considerando lo que ya se argumentó, no son directos de demostrar. En teoría de la elasticidad se establece que:

$$\frac{\delta L_x}{L_x} = \frac{1}{E} \frac{F}{A}, \quad (8.1)$$

$$\frac{\delta L_y}{L_y} = -\nu \frac{\delta L_x}{L_x}, \quad (8.2)$$

$$\frac{\delta L_z}{L_z} = -\nu \frac{\delta L_x}{L_x}. \quad (8.3)$$

Aquí se han introducido dos propiedades mecánicas del material, el módulo de Young  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ . El módulo de Young tiene, como otras constantes elásticas, unidad de presión. Es el equivalente de la rigidez de un resorte frente a una compresión o un estiramiento, siendo siempre  $E > 0$ . Por otro lado, el coeficiente de Poisson nos dice que las deformaciones transversales se relacionan con la deformación de estiramiento mediante un factor que depende del material. Se sabe que  $\nu$  está acotado entre  $-1$  y  $1/2$ , aunque en general es  $> 0$ . Esto implica que las dimensiones transversales se contraen cuando el sólido se estira en la dirección del esfuerzo. Por último, estas tres ecuaciones no son otra cosa que una versión de la Ley de Hooke para un sólido elástico, pues todas dicen que la deformación es proporcional a la fuerza aplicada.

Al igual que un fluido, un sólido elástico puede propagar ondas. Un ejemplo son las ondas sísmicas en la Tierra. La ecuación dinámica para la deformación de un sólido elástico está dada por la ecuación de Newton. Esta ecuación tiene una forma matemática similar a la ecuación de ondas, pero dada la naturaleza tridimensional del problema y a los diferentes tipos de esfuerzos que pueden producir deformaciones diferentes, su forma es más complicada. En resumen se puede decir que al igual que una cadena de resortes, un sólido elástico puede propagar ondas de longitudinales (es decir de compresión y estiramiento) donde la dirección de propagación es paralela a la dirección de deformación, como también ondas transversales (de cizalle) donde la dirección de propagación es perpendicular a la dirección de deformación.

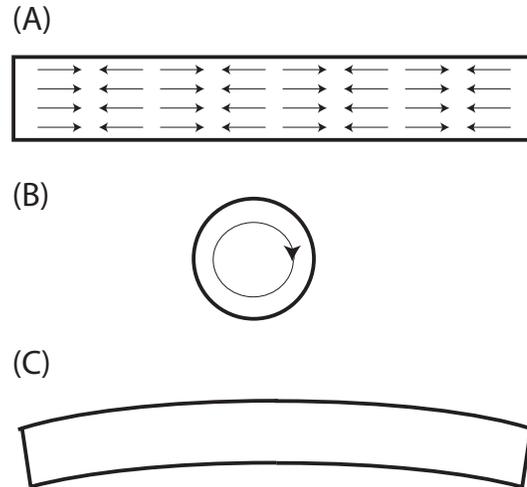


Figura 8.2: Posibles modos de vibración de una barra delgada, en este caso un cilindro. (A) Modo longitudinal; (B) Modo de torsión; (C) Modo de flexión.

### 8.1.1. Modos de resonancia de una barra elástica

Describiremos las deformaciones elásticas de una barra en el cuadro de la elasticidad lineal, válido para deformaciones muy pequeñas respecto a las dimensiones características del sistema. Tal como en una cuerda de cierta densidad lineal bajo una tensión con condiciones de borde dadas, un tubo lleno con un gas o un instrumento musical (de aire o de cuerda), una barra metálica presenta modos propios de vibración, y por ende frecuencias naturales de oscilación.

Se sabe que una barra sólida tiene diversos tipos de modos de vibración. En el caso de una *barra delgada* estos modos pueden clasificarse de la siguiente manera: de flexión, de torsión, o de deformaciones longitudinales. Estos modos se muestran en la figura 8.2. Cada modo tiene a su vez un conjunto de frecuencias asociadas, según las longitudes de onda que pueden estar presentes. Por ejemplo, un modo de vibración longitudinal puede tener una longitud de onda igual al largo de la barra, a un medio, a un tercio o a un cuarto de longitud de la barra, como el que se muestra en la figura 8.2a, etc. El conjunto de frecuencias de todos estos modos de vibración es lo que llamaremos espectro de frecuencias de resonancia de un sólido. El hecho que sea una barra delgada significa que las deformaciones no tienen una dependencia en las coordenadas transversales de la barra. Esta aproximación es importante desde el punto de vista analítico pues, como veremos luego, en este caso se pueden obtener fórmulas analíticas para las frecuencias de los diferentes tipos de modos.

Es importante notar que al igual que para una cuerda, las frecuencias de resonancia dependen de las condiciones (generalmente de borde) que se aplican a una barra. Para los modos longitudinales y de torsión las condiciones de borde son las usuales: libres o fijas. Para los modos de flexión se debe especificar además si el extremo está *empotrado* o *no*, lo que equivale a imponer si la derivada de la deformación con respecto a la coordenada a lo largo de la barra es constante (por ejemplo cero) o libre.

La ecuación de onda que describe deformaciones  $u_x(x)$  de una barra de dimensiones transversales

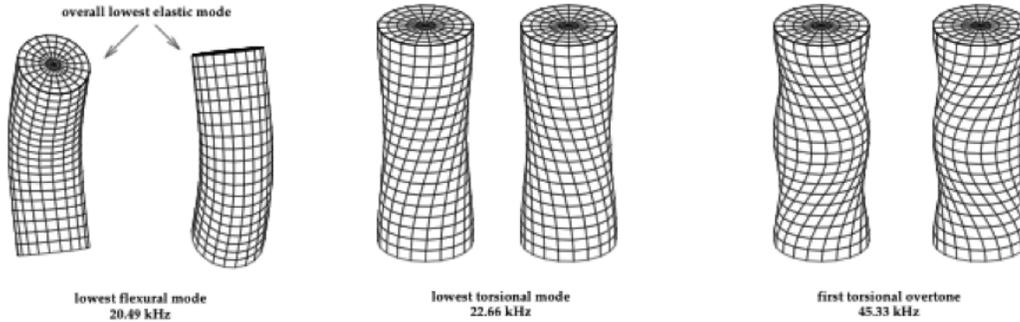


Figura 8.3: Ejemplos de modos de vibración (Referencia: Tesis de Brian Zadler, Colorado School of Mines). Primer modo de flexión (izquierda), primer modo de torsión (centro) y segundo modo de torsión (derecha).

pequeñas comparadas con su largo se escribe

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0, \quad (8.4)$$

donde se ha supuesto que las deformaciones sólo van en la dirección del eje de la barra (eje  $x$ ) y que sólo dependen de esta coordenada, es decir  $\vec{u}(x, y, z) = u_x(x)\hat{x}$ . De esta ecuación se reconoce una velocidad de onda efectiva  $c = \sqrt{E/\rho}$ .

En lo que sigue nos preocuparemos de condiciones de borde simples, similares a las de una cuerda. El espectro de frecuencias de resonancia de los modos longitudinales de una barra completamente libre<sup>4</sup> está dada por la relación

$$f_n^L = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{n}{2L}, \quad (8.5)$$

donde  $E$  es el módulo de Young,  $\rho$  la densidad de masa y  $L$  el largo de la barra. Por lo tanto el modo fundamental correspondiente a  $n = 1$  tiene una frecuencia de resonancia  $f_1 = \sqrt{(E/\rho)}/(2L)$ , lo que corresponde a una longitud de onda igual a 2 veces el largo de la barra ( $f_n \lambda_n = c$ ). En el caso de una barra delgada de acero de 1 m de largo,  $E \approx 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$ , y  $\rho \approx 8 \text{ g/cm}^3 = 8000 \text{ kg/m}^3$ , por lo tanto el primer modo longitudinal ( $n = 1$ ) tendrá una frecuencia  $f_1 \approx 2500 \text{ Hz}$ .

A su vez, los modos de torsión para una barra libre de esfuerzos tienen frecuencias dadas por

$$f_n^T = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \frac{n}{2L}.$$

Por último, los modos de flexión para la misma barra libre tienen frecuencias dadas por

$$f_n^B = \frac{\pi R}{16L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot (2n+1)^2,$$

<sup>4</sup>se puede pensar que de alguna manera la barra está suspendida en el espacio sin esfuerzos aplicados.

con  $R$  el radio de la barra.

### 8.1.2. Series de Fourier

En muchas situaciones se tiene una señal temporal no sinusoidal que se desea analizar. Sin embargo, para ciertos tipos de análisis, por ejemplo un oscilador forzado, un filtro de frecuencia u otro circuito eléctrico, se considera que la señal que se impone (de forzamiento en el caso del oscilador o de voltaje en un circuito) es sinusoidal. Esto se debe a que el tratamiento matemático es más simple, pero también a que gracias al teorema de Fourier se tiene que cualquier señal periódica puede ser descompuesta en una serie de funciones sinusoidales. Si el sistema que se está estudiando es lineal, de modo que se cumple el principio de superposición, entonces este teorema es de gran utilidad pues al estudiar la respuesta a una frecuencia, se puede construir la respuesta más general como la superposición de las respuestas individuales.

El teorema de Fourier establece que una función periódica  $F(t)$ , tal que  $F(t+T) = F(t)$ , puede ser descompuesta en la serie

$$F(t) = \frac{A_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(2\pi n f_o t) + B_n \sin(2\pi n f_o t)),$$

donde  $f_o = 1/T$  es la frecuencia más baja y  $A_o/2$  es la componente continua (constante) de la señal. Esta definición es consistente con otras definiciones que aparecen en la literatura, como

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos(2\pi n f_o t) + b_n \sin(2\pi n f_o t)), \quad (8.6)$$

donde  $A_n = a_n + a_{-n}$  y  $B_n = b_n - b_{-n}$ .

La figura 8.4 muestra un ejemplo de tal descomposición. Una señal cuadrada de frecuencia  $f$  se representa como la suma de sinusoides de frecuencia  $f$  y  $3f$  (figura 8.4a), como la suma de sinusoides de frecuencias  $f$ ,  $3f$  y  $5f$  (figura 8.4b) y finalmente como suma de sinusoides de frecuencia  $f$ ,  $3f$ ,  $5f$ ,  $7f$  y  $9f$  (figura 8.4c), siendo que la verdadera señal cuadrada tiene todas las componentes.

En la práctica es de gran utilidad realizar esta descomposición, de manera de obtener las amplitudes  $A_n$  y  $B_n$  para una señal dada. Esto es cierto incluso para señales que no son periódicas. Esto se logra repitiendo la señal a analizar muchas veces usando ventanas de empalme, de modo que la señal sea periódica.

Para poder realizar la descomposición de una señal cualquiera  $F(t)$  en amplitudes de Fourier  $A_n$  y  $B_n$ , es importante usar la ortogonalidad de las funciones sinusoidales. Esto se traduce en las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi n f_o t) \cdot \cos(2\pi m f_o t) dt = 0, \quad (8.7)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi n f_o t) \cdot \sin(2\pi m f_o t) dt = 0, \quad (8.8)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi n f_o t) \cdot \cos(2\pi m f_o t) dt = 0. \quad (8.9)$$

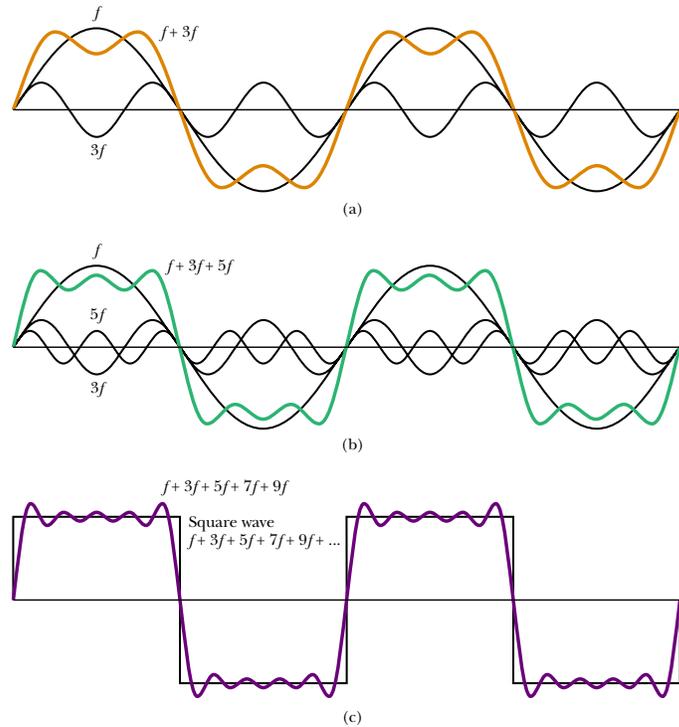


Figura 8.4: Ejemplo de descomposiciones de una señal cuadrada en una suma finita de sinusoides de frecuencias impares. Mientras más términos se consideran, mejor es la descomposición.

Aquí,  $n \neq m$ . En el caso de que  $n = m$ , las primeras dos ecuaciones son

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi n f_o t) \cdot \cos(2\pi m f_o t) dt = \frac{1}{2}, \quad (8.10)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi n f_o t) \cdot \sin(2\pi m f_o t) dt = \frac{1}{2}. \quad (8.11)$$

Usando estas relaciones y la serie (8.6), es directo demostrar

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cdot \cos(2\pi n f_o t) dt, \quad (8.12)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cdot \sin(2\pi n f_o t) dt. \quad (8.13)$$

En la práctica se suele usar una notación compleja, de manera que

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i f_o t},$$

donde  $C_n$  es un número complejo, de modo que  $C_n = C_{-n}^*$  para que  $F(t)$  sea real. Luego, la relación inversa es

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \cdot e^{-2\pi i n f_o t} dt. \quad (8.14)$$

Esta definición tiene la ventaja de tratar con una sola amplitud, pero compleja. Tiene por lo tanto asociada un valor absoluto y una fase.

Los algoritmos numéricos usan una versión de esta última definición. Deben tratar con señales discretas por lo que hay una cota superior al número  $n$  para la serie dada por la ecuación (8.6). Esta cota está dada por la frecuencia de adquisición de la señal a analizar. Si se toman  $N$  datos con un intervalo de tiempo  $\Delta t$  (frecuencia de adquisición  $f_s = 1/\Delta t$ ), entonces la frecuencia mínima es  $f_o = 1/T = 1/(N\Delta t)$ , la máxima es  $f_{n_{\max}} = 1/(2\Delta t)$ . La resolución en frecuencia es  $\Delta f = f_{n+1} - f_n = f_o$ .

### 8.1.3. Ejemplo de uso de series de Fourier

En la guía práctica asociada a esta unidad se analizará el espectro de resonancia de una barra metálica mediante la técnica de impulsión. Se trata de dar un golpe a una barra suspendida (como el golpe a una campana) lo cual puede considerarse como una excitación impulsiva. El límite de esta excitación corresponde a un impulso instantáneo, de duración nula y de intensidad infinita, de modo que su integral es finita. Matemáticamente esto corresponde a considerar la *distribución de Dirac* o simplemente *delta de Dirac*  $\delta(t)$ , objeto matemático abstruso, muchas veces erróneamente definida como

$$\delta(t) = 0, \text{ si } t \neq 0, \quad (8.15)$$

$$\delta(t) = \infty, \text{ si } t = 0, \quad (8.16)$$

$$(8.17)$$

Para efectos de este curso es conveniente imaginar que ese objeto se asemeja a una función nula excepto en las cercanías de  $t = 0$  y que satisface:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Usando esta última expresión y la ecuación (8.14), es simple demostrar que  $C_n = 1$  para todo  $n$ . Luego, en nuestro ejemplo, un golpe excita todas las frecuencias, y las que se amplifican son aquellas que corresponden a frecuencias de resonancia de la barra. Éstas frecuencias serán las que sobresalen en un análisis de frecuencia de cualquier señal que se mida en la barra (oscilación, deformación, aceleración o el sonido emitido como se propone en la guía de laboratorio).



# Unidad 9: Regresión lineal

## 9.1. Ajuste de un modelo lineal

En la sesión práctica asociada a esta guía se estudiarán las resonancias de modos de flexión en una barra de duraluminio mediante la técnica de impulsión. Usando una estimación del módulo de Young se determinarán las frecuencias de algunos modos de flexión. Realizando una regresión lineal en escala log-log de estas frecuencias versus el número  $n$  de cada modo se obtendrá una medición precisa del módulo de Young del material utilizado.

Es necesario revisar entonces la metodología de regresión lineal de un conjunto de datos. En la figura 1 se presenta una serie de medidas (puntos rojos) de una cierta cantidad  $y$  en función de otra cantidad  $x$ . Supondremos que se dispone de  $N$  datos, de modo que los resultados a analizar serán denotados como

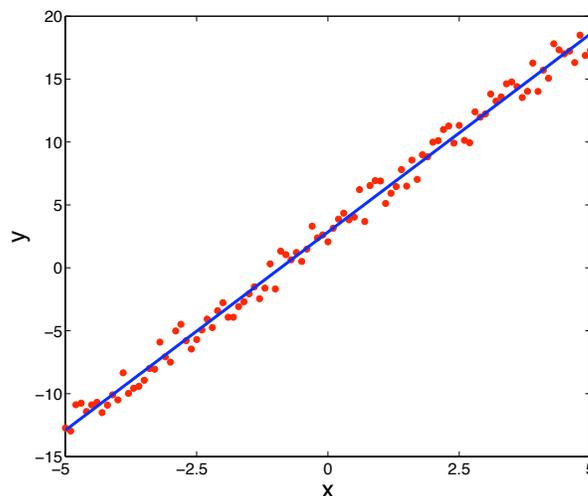


Figura 9.1: Ejemplo de conjunto de datos a los cuales se desea ajustar un modelo lineal  $y = a \cdot x + b$ . El método de regresión lineal permite encontrar los valores  $a$  y  $b$  que mejor se ajustan a los datos experimentales como también entregar una medida de lo bueno que es el ajuste mediante el parámetro  $R^2$ . En este caso los parámetros ajustados dan  $a = 3,15$  y  $b = 2,84$ , con  $R^2 = 0,992$ .

$(x_i, y_i)$  con  $i = 1 \dots N$ . En la misma figura se muestra además una línea continua que pretende describir los resultados con el modelo lineal  $y = a \cdot x + b$ . La pregunta fundamental que nos concierne es cómo determinar los valores  $a$  y  $b$  que mejor describen las medidas obtenidas.

Para ello se define  $y_i^m = a \cdot x_i + b$  como el valor de la cantidad  $y$  dado por nuestro modelo evaluado en la cantidad  $x_i$ . Esto corresponde a los puntos sobre la curva continua de la figura 1 evaluados en los puntos  $x_i$ . Luego, en general, se cumple  $|y_i^m - y_i| \neq 0$  para todo  $i = 1 \dots N$ .

La búsqueda de los mejores valores de  $a$  y  $b$  se traduce entonces en minimizar estas cantidades  $|y_i^m - y_i|^2$ . Para ello se define

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N (y_i^m - y_i)^2,$$

la cual se busca minimizar. En el caso del modelo lineal se tiene

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N (a \cdot x_i + b - y_i)^2. \quad (9.1)$$

Para minimizar esta cantidad podemos comenzar por dar una interpretación geométrica. Para un conjunto de datos  $(x_i, y_i)$  se puede considerar  $\chi^2$  como una función de  $a$  y  $b$ , lo que puede ser considerado como una superficie: en el plano  $(a, b)$  la posición de la superficie corresponde al valor de  $\chi^2$ . Un ejemplo de esta interpretación se presenta en la figura 2a. Luego, el minimizar  $\chi^2$  se traduce en buscar los valles de esta superficie. La figura 2b muestra la coordenada de este mínimo (intersección de dos líneas punteadas).

Matemáticamente se obtiene el par de valores  $a$  y  $b$  que minimizan  $\chi^2$  imponiendo las condiciones

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0.$$

Luego, usando la definición (9.1), se obtiene el par de ecuaciones

$$a \sum_{i=1}^N x_i^2 + b \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i = 0, \quad (9.2)$$

$$a \sum_{i=1}^N x_i + b \sum_{i=1}^N 1 - \sum_{i=1}^N y_i = 0. \quad (9.3)$$

Finalmente se puede despejar  $a$  y  $b$ :

$$a = \frac{\left( \frac{\sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^N x_i} - \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} \right)}{\left( \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{\sum_{i=1}^N x_i} - \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \right)}, \quad (9.4)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} - a \cdot \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}. \quad (9.5)$$

Para terminar definimos el coeficiente de regresión  $R^2$  como una medida cuantitativa de lo acertado del ajuste. Así, un valor  $R^2$  cercano a 1 indica que el ajuste es bueno. La definición precisa es

$$R^2 = 1 - \frac{\chi^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \langle y \rangle)^2},$$

donde

$$\langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

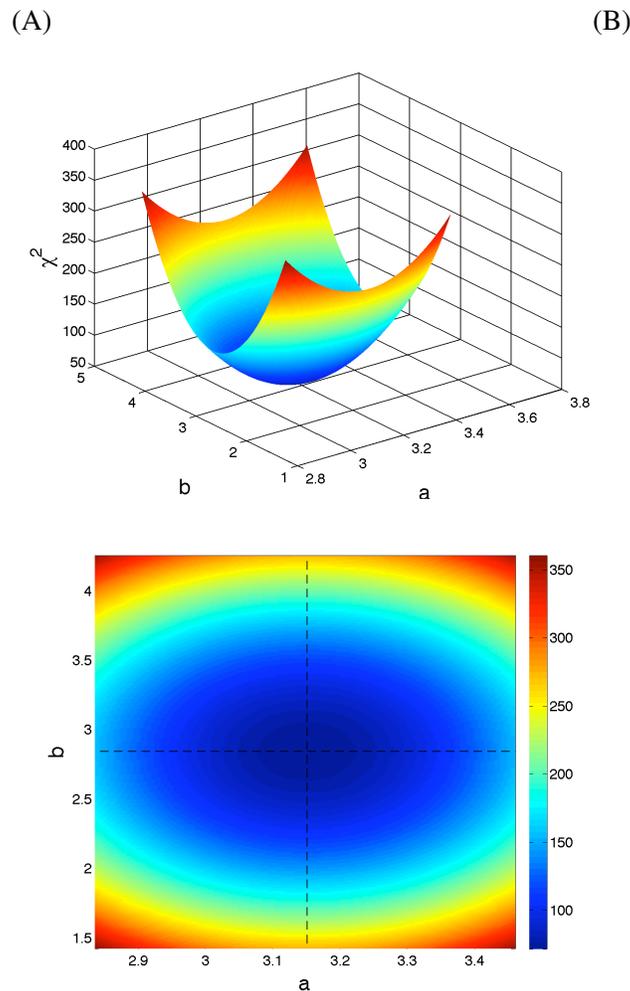


Figura 9.2: Superficie  $\chi^2$  versus  $a$  y  $b$  usando los datos  $(x_i, y_i)$  de la figura 1. El mínimo se obtiene para  $a = 3,15$  y  $b = 2,84$ , con  $R^2 = 0,992$ . La figura (A) muestra la superficie en una representación 3D y la figura (B) muestra la misma pero en una representación de colores, siendo azul oscuro el mínimo. La intersección de las líneas punteadas muestra el mínimo de  $\chi^2$  en  $a = 3,15$  y  $b = 2,84$ .

es el promedio de los datos  $y_i$ .

## 9.2. Casos especiales

El método de regresión lineal se puede aplicar a otros modelos de interés físico. Revisaremos los tres casos más comunes.

1. **Caso semilog-y:** Se trata de modelos que tienen la forma

$$y^* = A \cdot e^{\alpha x}.$$

En este caso se toma logaritmo a ambos lados de la ecuación, resultando

$$\log(y^*) = \log(A) + \alpha \cdot x.$$

Se identifica entonces  $y = \log(y^*)$ ,  $a = \alpha$  y  $b = \log(A)$ , y se procede como se describió en la sección anterior. Al graficar los datos originales en un gráfico semilog-y (eje  $y$  logarítmico, eje  $x$  lineal) se obtiene una línea recta. En Matlab un gráfico de este tipo se obtiene con la función  $\text{semilogy}(x, y^*)$  (Atención, esto es con los datos originales  $x$  e  $y^*$ ).

2. **Caso semilog-x:** Se trata de modelos de la forma

$$y = A \cdot \log(\alpha x^*).$$

Usando la propiedad de logaritmos de productos se obtiene

$$y = A \cdot \log(\alpha) + A \cdot \log(x^*).$$

Se identifica entonces  $x = \log(x^*)$ ,  $a = A$  y  $b = A \cdot \log(\alpha)$ , y se procede como en la sección anterior. En Matlab un gráfico de este tipo se obtiene con la función  $\text{semilogx}(x^*, y)$  (Atención, esto es con los datos originales  $x^*$  e  $y$ ).

3. **Ley de potencia:** Se trata de modelos de la forma

$$y^* = A \cdot (x^*)^\alpha.$$

Otra vez se toma logaritmo a ambos lados de esta ecuación y se obtiene

$$\log(y^*) = \log(A) + \alpha \cdot \log(x^*).$$

Se identifica en este caso  $y = \log(y^*)$ ,  $x = \log(x^*)$ ,  $a = \alpha$  y  $b = \log(A)$ . Al graficar los datos originales en un gráfico log-log, se obtiene una línea recta. En Matlab un gráfico de este tipo se obtiene con la función  $\text{loglog}(x^*, y^*)$  (Atención, esto es con los datos originales  $x^*$  e  $y^*$ ). Este último caso es de interés para el objetivo de la sesión práctica asociada a esta guía.