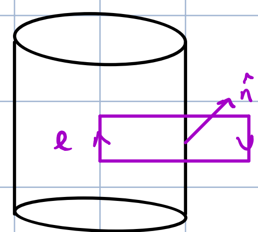
P_1

El campo dentro de un solenoide se determina con la ley de Ampere. Por simetría $\vec{B} = B(\vec{r})\hat{z}$ y se cumple:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{\partial B}{\partial \theta} = \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

Entonces B es constante. Como vimos en otras clases, esta constante no tiene porque ser igual adentro y afuera del solenoide. Afuera, debe ser nulo, porque infinitamente lejos el campo es nulo. Entonces, el campo al interior es posible determinarlo integrando la ley de Ampere en un circuito rectangular



$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{enc}$$

$$\Rightarrow B_{int} \cancel{\ell} = \mu_0 \frac{N\cancel{\ell}}{h} I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 N}{h} I \hat{z}$$

Con este resultado podemos calcular la autoinductancia y la inductancia mutua de los solenoides del sistema. Usamos la notación Φ_{ij} para el flujo magnetico causado por el solenoide i en el solenoide j y I_i para la corriente del solenoide i, donde i,j son a o b.

N espiras de radio a

$$\Phi_{aa} = \frac{\mu_0 N}{h} I_a \cdot N\pi a^2 \qquad \Phi_{bb} = \frac{\mu_0 N^2}{h} I_b \pi b^2$$

$$\Phi_{ab} = \frac{\mu_0 N^2}{h} I_a \cdot \pi b^2 \qquad \Phi_{ba} = \frac{\mu_0 N^2}{h} I_b \pi b^2$$

Entonces la ley de Faraday-Lenz nos dice que la fem inducida cumple

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_i}{dt} = -\sum_j \frac{d\Phi_{ji}}{dt} \qquad (\Phi_i = \text{flujo magnetico total})$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{E}_a &= -\frac{d\Phi_{aa}}{dt} - \frac{d\Phi_{ba}}{dt} = -\mu_0 \frac{N}{h}\pi \left(a^2 \frac{dI_a}{dt} + b^2 \frac{dI_b}{dt}\right) = I_a R \\ \mathcal{E}_b &= -\frac{d\Phi_{ab}}{dt} - \frac{d\Phi_{bb}}{dt} = -\mu_0 \frac{N}{h}\pi b^2 \left(\frac{dI_a}{dt} + \frac{dI_b}{dt}\right) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \frac{dI_b}{dt} = -\frac{dI_a}{dt} \end{aligned}$$

! Este circuito no tiene resistencia

$$\Rightarrow I_a R = -\frac{\mu_0 N^2 \pi}{h}(a^2 - b^2)\frac{dI_a}{dt} \Rightarrow I_a(t) = I_0 e^{-\gamma t} \qquad \gamma \equiv \frac{Rh}{\mu_0 N^2 \pi}(a^2 - b^2)^{-1} > 0$$

Además $\frac{dI_b}{dt} = -\frac{dI_a}{dt} \Rightarrow I_b = -I_a + C$ y como $I_b(t=0) = 0$

$$\Rightarrow I_b(t) = I_0 \left(1 - e^{-\gamma t}\right)$$

b) La energía magnetica en un sistema esta dada por la expresión vista en clases:

$$U_m = \frac{1}{2}\sum_{ij} L_{ij} I_i I_j \qquad \text{donde} \quad L_{ij} = \frac{\Phi_{ij}}{I_i}$$

Para $t = 0$ $I_a = I_0$ y $I_b = 0$ $\Rightarrow U_m^i = \frac{1}{2} L_{aa} I_a^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{h} I_0^2$

Para $t \to \infty$, $I_a = 0$ y $I_b = I_0$ $\Rightarrow U_m^f = \frac{1}{2} L_{bb} I_b^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 \pi b^2}{h} I_0^2$

La energía disipada por efecto Joule sera la diferencia entre la energía inicial y final.

$$U_{disipada} = U_m^i - U_m^f = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 \pi I_0^2}{h}(a^2 - b^2)$$

Estos calculos los podemos hacer de forma diferente, usando al campo magnetico. La expresión para el campo magnetico se obtiene usando la ley de Ampere y el resultado es:

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\substack{\text{todo el}\\ \text{espacio}}} B^2 d\tau$$

$$U_m^i = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\substack{\text{cilindro}\\ \text{de radio } a}} \left(\mu_0 \frac{NI_0}{h}\right)^2 d\tau = \frac{\mu_0}{2}\frac{N^2 I_0^2}{h^2}\cdot \pi a^2 h = \frac{\mu_0}{2}\frac{N^2 I_0^2}{h}\cdot \pi a^2$$

$$U_m^f = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\substack{\text{cilindro}\\ \text{de radio } b}} \left(\mu_0 \frac{NI_0}{h}\right)^2 d\tau = \frac{\mu_0}{2}\frac{N^2 I_0^2}{h^2}\cdot \pi b^2 h = \frac{\mu_0}{2}\frac{N^2 I_0^2}{h}\cdot \pi b^2$$

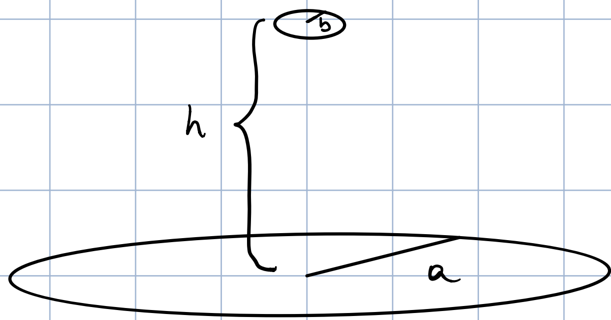
y la potencia disipada es $P = \mathcal{E}_{ind} I_a = I_a^2 R = -\frac{dU_m}{dt}$

$$\Rightarrow \int P dt = R\int_0^\infty I_0^2 e^{-2\gamma t} dt = I_0^2 R \cdot \frac{1}{2\gamma} = \frac{\mu_0 I_0^2}{2h} N^2 \pi (a^2 - b^2)$$

Obteniendose así los mismos resultados.

P2

Consideramos 2 anillos de radio a y b ($a \gg b$) separados una distancia d



Para calcular el coeficiente de inducción mutua del sistema, podemos calcular el flujo en la espira a producido por una corriente I en el circuito de radio b o al reves. Dado que $a \gg b$, es más fácil aproximar el flujo en la espira de radio b producida por una corriente I en la de radio a, por lo que trabajaremos con ese caso.

Lo que haremos, sera suponer a la espira de radio b como puntual respecto a la de radio a, es decir el flujo sobre esta sera

$$\Phi_b = \int_b \vec{B}_a \cdot d\vec{s} = \pi b^2 \, B_a(h\hat{z})$$

donde B_a es el campo generado por la espira a y $B_a(h\hat{z})$ lo calculamos facilmente con la ley de biot-Savart

$$\vec{B}_a(h\hat{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I a d\theta \hat{\theta} \times (h\hat{z} - a\hat{r})}{(h^2+a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I a d\theta \, (\overset{\text{integra } 0}{\cancel{h\hat{r}}} + a\hat{z})}{(h^2+a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2 \hat{z}}{2(h^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_b = \pi b^2 \cdot \frac{\mu_0 I a^2}{2(h^2+a^2)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad M_{ab} = \frac{\Phi_b}{I} = \frac{\pi \mu_0 a^2 b^2}{2(h^2+a^2)^{3/2}}$$

b) Consideramos una corriente I_a, I_b en cada circuito. La energía magnetica la calculamos a partir de la fórmula:

$$U_m = \frac{1}{2}\sum_{i,j} M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2}\left(L_a I_a^2 + L_b I_b^2 + 2M_{ab} I_a I_b\right)$$

Luego, la fuerza entre las 2 espiras la obtenemos como:

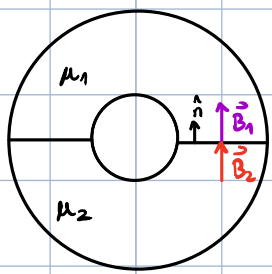
solo M_{ab} depende de h

$$\vec{F} = \nabla U_m = \frac{dU_m}{dh}\hat{z} = 2\frac{dM_{ab}}{dh} I_a I_b \hat{z} = -\frac{3h\pi\mu_0 a^2 b^2}{(h^2+a^2)^{5/2}} I_a I_b \hat{z}$$

Comparamos esta fuerza con la expresión $\vec{F} = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B})$ para dipolos magneticos. En este caso $\vec{m} = I_b \pi b^2 \hat{z}$ y $\vec{B} = \vec{B}_a(h\hat{z})$. Notamos entonces que $U_m = \vec{m}\cdot\vec{B}$ es la expresión para la energía de un dipolo magnetico.

Nota: Aquí la aproximación $\vec{B}_a \simeq \vec{B}_a(h\hat{z})$ desprecia al radio b, para el cálculo del campo, pero si b no es chico el cálculo sería mucho más complicado.

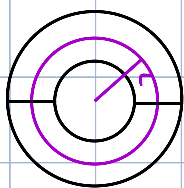
P_3 Por regla de la mano derecha, sabemos que el campo $\vec{H}$ es de la forma $\vec{B} = B(r)\hat{\theta}$. La razón de porque sabemos que B no depende de θ es porque debe cumplir la la condición de borde en la unión de los 2 medios



no hay corriente ahí

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \times \hat{n} = 0$$

Luego, para calcular $\vec{B}$ aplicamos la ley de Ampere en medios materiales para un círculo de radio r



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{J}_f \cdot d\vec{S}$$ y como $\vec{B} = \mu \vec{H}$

Luego $\vec{B} = \mu \vec{H}$, pero μ depende de r y θ. El tramo relevante es $a < r < b$, donde μ está dado por:

$$\mu(\theta) = \begin{cases} \mu_1 & \text{si} \quad 0 < \theta < \pi \\ \mu_2 & \text{si} \quad \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi r B(r)\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r < a \text{ o } r > b \\ I & \text{si} \quad a < r < b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{I \mu_1 \mu_2 \hat{\theta}}{\pi r (\mu_1 + \mu_2)}$$ si $a < r < b$ y nulo en el resto.

Y ENTONCES EL CAMPO AUXILIAR MAGNETICO $\vec{H}$ ESTA DADO POR:

$$\vec{H}(r,\theta) = \frac{\vec{B}}{\mu(\theta)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r<a \quad o \quad r>b \\ \dfrac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\dfrac{I}{\pi r}\hat{\theta} & \text{si} \quad a<r<b \quad y \quad 0<\theta<\pi \\ \dfrac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\dfrac{I}{\pi r}\hat{\theta} & \text{si} \quad a<r<b \quad y \quad \pi<\theta<2\pi \end{cases}$$

ADEMÁS, COMO $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$, LA MAGNETIZACIÓN ES $\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$

$$\vec{M}(r,\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r<a \quad o \quad r>b \\ \dfrac{\mu_2(\mu_1-\mu_0)}{\mu_1+\mu_2}\dfrac{I}{\pi r}\hat{\theta} & \text{si} \quad a<r<b \quad y \quad 0<\theta<\pi \\ \dfrac{\mu_1(\mu_2-\mu_0)}{\mu_1+\mu_2}\dfrac{I}{\pi r}\hat{\theta} & \text{si} \quad a<r<b \quad y \quad \pi<\theta<2\pi \end{cases}$$