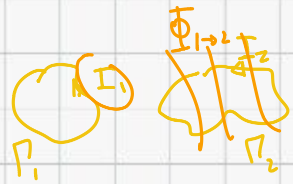
26/4/21 # Aux#11 Electro.

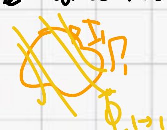
Resumen:

- Inductancia mútua: Dados 2 circuitos Γ_1 y Γ_2, definimos la inductancia mutua entre ellos como la razón entre el flujo que pasa por el circuito sobre la corriente que produce el campo:



$$M_{1\to 2} = \frac{\Phi_{1\to 2}}{I_1} = \frac{\Phi_{2\to 1}}{I_2}$$

- Autoinductancia: Dado un circuito Γ_1 con corriente I_1 se define la autoinductancia como la razón entre el flujo que atravieza Γ_1 generado por la corriente I_1 sobre la corriente I_1



$$L = \frac{\Phi_{1\to 1}}{I_1}.$$

Dados 2 circuitos podemos construir su matriz de inductancias de la forma:

$$\Phi_1 = \overset{L_1}{M_{11}} I_1 + M_{12} I_2$$
$$\Phi_2 = M_{21} I_1 + M_{22} I_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

donde Φ_i es el flujo total que atravieza al circuito Γ_i.

Podemos usar la ley de Lenz para escribir la fem. inducida (si $I_1(t)$ e $I_2(t)$) sobre el circuito Γ_1 o Γ_2

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt} - L_1\frac{dI_1}{dt}$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} - L_2\frac{dI_2}{dt}$$

Cosas importantes para el C3

- Biot-Savart: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, dl'$; $\vec{I}$: vector intensidad de corriente

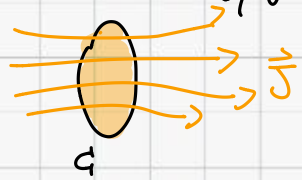
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint \frac{\vec{K}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, dS'$$

$\vec{K}$: vector densidad superficial de corriente

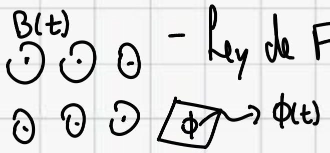
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{J}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d\tau'$$

$\vec{J}$: Vector densidad volumétrica de corriente.

- Ley de Ampere: $\nabla\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$



$\Rightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{en}$; con I_{en} la corriente enlazada por el camino cerrado C.



- Ley de Faraday-Lenz: $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$; donde Φ_m es el flujo magnético que atravieza el circuito donde se induce la corriente.

- Fuerza de Lorentz: $\vec{F}_{EM} = q(\underbrace{\vec{E}}_{\vec{F}_E} + \underbrace{\vec{v}\times\vec{B}}_{\vec{F}_B})$

velocidad de la partícula

P1 b) Sabemos que, usando ley de Ampere, el campo magnético que genera un solenoide de muy largo (L_0) de radio R es y n vueltas por unidad de largo es:

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{z} & \text{si } r<R \\ 0 & \text{si } r>R \end{cases}$$

a) Usando el resultado planteado podemos calcular el flujo magnético que pasa por el solenoide, es decir, el flujo que se produce el solenoide a sí mismo:

$$\Phi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{a}$$; la superficie de integración será un anillo dentro del solenoide con su mismo radio.

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{b} \mu_0 n I \cdot r\, dr d\theta = \cancel{2}\pi \frac{b^2}{\cancel{2}} \mu_0 n I = \pi b^2 \mu_0 n I$$

considerando que tenemos n vueltas por unidad de largo, en todo el solenoide habrá un flujo neto de

$$\Phi = n \cdot L_0 \cdot \pi b^2 \mu_0 n I = \pi b^2 \cdot n^2 \mu_0 L_0 I$$

densidad de vuetas × largo total = total de vueltas.

De esta forma, identificando la autoinductancia $L = \frac{\Phi}{I}$ del calculo anterior:

$$L = \mu_0 \pi b^2 n^2 L_0 \;//$$

b) Ahora la cosa se enreda un poco, tenemos un solenoide dentro de otro. Lo bueno es que se vale la superposición pero nos interesa más cada campo por separado. Veamos primero todos los flujos que genera la corriente del solenoide mas grande, a esta le llamaremos I_2 y es responsable del siguiente campo:

$$\vec{B}_2(r) = \begin{cases} \mu_0 n_2 I_2 \hat{z} & \text{si } r<b \\ 0 & \text{si } r>b \end{cases}$$

las superficies que nos importan son las áreas transversales de ambos solenoides.

Así, los flujos son:

$\Phi_{i\to j}$ es el flujo que genera el circuito i sobre j.

$$\Phi_{2\to 1} = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} B_2\, r\,dr\,d\theta = \pi a^2 \mu_0 n_2 I_2 \qquad M_{2\to 1} = \pi a^2 \mu_0 n_2 n_1 l$$

número de espiras del solenoide 1

$$\Phi_{2\to 2} = \int_0^{2\pi}\int_0^{b} B_2\, r\,dr\,d\theta = \pi b^2 \mu_0 n_2 I_2 \quad \Rightarrow \quad M_{2\to 2} = L_2 = \pi b^2 \mu_0 n_2^2 l$$

$$\Phi_{1\to 1} = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} B_1\, r\,dr\,d\theta = \pi a^2 \mu_0 n_1 I_1 \qquad M_{1\to 1} = L_1 = \pi a^2 \mu_0 n_1^2 l$$

$$\Phi_{1\to 2} = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} B_1\, r\,dr\,d\theta = \pi b^2 \mu_0 n_1 I_1 \quad \Rightarrow \quad M_{1\to 2} = \pi a^2 \mu_0 n_2 n_1 l$$

b

recordar que debo integrar el flujo SOLO donde existe el campo, en este caso B_1 solo es no nulo para $r<a$.

P2) Usamos coordenadas cilíndricas desde el plano y el centro del disco. Como es un disco aislante las cargas giran junto al disco. Así, una partícula a una distancia r del centro tiene velocidad $\vec{v} = \omega r \hat{\theta}$. Considerando esto podemos considerar una densidad de corriente superficial como:

$$\vec{J} = \sigma \vec{v} = \sigma r \omega \hat{\theta}$$

Por otro lado sabemos que el campo generado por una corriente superficial es:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}\times(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}\,dS$$

donde $\vec{R}$ se integra sobre la superficie, y $\vec{r}$ es donde estamos calculando el campo.

$\Rightarrow$ en nuestro caso: $\vec{r} = z\hat{k}$; $\vec{R} = \rho\hat{\rho}$; $dS = \rho\, d\rho\, d\theta$

Reemplazamos en la integral:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^a\int_0^{2\pi} \frac{\sigma\rho w \times (z\hat{k}-\rho\hat{\rho})}{(z^2+R^2)^{3/2}}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

; de mecánica sabemos que $\hat{\theta}\times\hat{k}=\hat{\rho}$; $\hat{\theta}\times\hat{\rho}=-\hat{k}$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_0^a \frac{w\sigma\rho^2 z}{(z^2+R^2)^{3/2}}d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi}\hat{\rho}(\theta)\,d\theta}_{0} + \hat{k}\int_0^a \frac{\rho^3 w\sigma}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}d\rho \cdot 2\pi\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2}\sigma w\int_0^a \frac{\rho^3}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}d\rho = \underbrace{\ldots}_{\text{mucha matraca que resuelve el computador}} = \frac{\mu_0\sigma w}{2}\left[\frac{a^2+2z^2-2|z|(a^2+z^2)^{1/2}}{(a^2+z^2)^{1/2}}\right]\hat{k}$$

En particular $\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 w\sigma a}{2}\hat{k}$

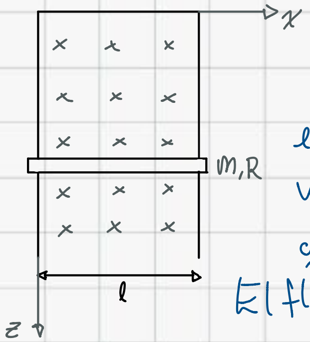
$$\Rightarrow \vec{B}(z) = \frac{\mu_0\sigma w}{2}\int_0^a \frac{r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}}dr\,\hat{k} = \text{"}\int \frac{t^2-z^2}{\cancel{t^3}\,t^2}\cancel{t}\,dt = \text{"}\int\left(1-\frac{z^2}{t^2}\right)dt$$

C.V.
$t^2=r^2+z^2$
$t\,dt = r\,dr$

$$\Rightarrow \vec{B}(z) = \frac{\mu_0\sigma w}{2}\cdot\left(t+\frac{z^2}{t}\right)\Big| = \frac{\mu_0\sigma w}{2}\cdot\left(\sqrt{z^2+r^2}+\frac{z^2}{\sqrt{z^2+r^2}}\right)\Big|_0^a = \frac{\mu_0\sigma w}{2}\left(\sqrt{a^2+z^2}+\frac{z^2}{\sqrt{a^2+z^2}}-2|z|\right)$$

$$\therefore\ \vec{B}(z) = \frac{\mu_0\sigma w}{2}\left(\sqrt{z^2+a^2}+\frac{z^2}{\sqrt{z^2+a^2}}-2|z|\right)\hat{k}\ //$$

P3b)



Cuando la barra empieze a caer, por la gravedad, comenzará a aumentar el área del circuito cerrado, por lo que el flujo enlazado por el circuito variará en el tiempo. Si la horquilla tiene ancho l y $z(t)$ es la coordenada que varía en el tiempo tal que $\vec{g}=g\hat{z}$ y $\vec{B}=-B\hat{y}$. Además $d\vec{a}=dxdz\hat{y}$

El flujo será:

$$\Phi(t)=\iint \vec{B}\cdot d\vec{a}=\int_0^{z(t)}\int_0^{l}-b\,dxdz=-Blz(t)$$

$\Phi(t)=-Blz(t)$

Usando Faraday $\Rightarrow$ $\mathcal{E}=-\frac{d\Phi}{dt}=Bl\frac{dz(t)}{dt}=Blv(t)$ y con una corriente en sentido opuesto a las manecillas del reloj. Esta corriente, por ley de Ohm, es: $I(t)=\frac{\mathcal{E}}{R}=\frac{Bl}{R}v(t)$ //

Ahora, como tenemos una corriente en la barra y está inmersa en un campo magnético esta sentirá una fuerza

$$\vec{F}=\int I d\vec{l}\times\vec{B}=\int I(dx\hat{x})\times -B\hat{y}=-IBl\hat{z}$$ apunta hacia arriba (se opone al mov.)

Así, si escribimos la ecuación de movimiento:

$$m\frac{dv}{dt}=mg-BlI=mg-\frac{(Bl)^2}{R}v$$

cambio de variables $v=\frac{R}{(Bl)^2}(u+mg)$

$\frac{dv}{dt}=\frac{R}{(Bl)^2}\frac{du}{dt}$

$v(0)=0\Rightarrow u=-mg$

$$\Rightarrow m\frac{R}{(Bl)^2}\frac{du}{dt}=mg-\cancel{\frac{(Bl)^2}{R}}\cdot\cancel{\frac{R}{(Bl)^2}}(u+mg)=\cancel{mg}-u-\cancel{mg}=-u$$

$$\frac{mR}{(Bl)^2}\cdot\frac{du}{dt}=-u\Rightarrow\frac{du}{u}=-\frac{(Bl)^2}{mR}\Big/\int_0^t\Rightarrow\ln\left(\frac{u}{-mg}\right)=-\frac{(Bl)^2}{mR}t\Big/e^{()}$$

$$\Rightarrow\frac{u}{-mg}=e^{-(Bl)^2t/mR}\Rightarrow u=-mg\,e^{-\frac{(Bl)^2t}{mR}}\Rightarrow\frac{(Bl)^2}{R}v-mg=-mg\,e^{-\frac{(Bl)^2t}{mR}}$$

$$\Rightarrow v(t)=\frac{mgR}{(Bl)^2}\left(1-\exp(-(Bl)^2t/mR)\right)$$ //