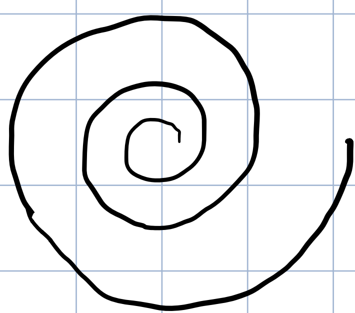
$\boxed{P_1}$

Consideramos un cable doblado de forma que la curva que forma se parametriza en polares como $r(\theta) = \frac{\theta}{2\pi} + 1$. El alambre da n vueltas. Si se hace circular una corriente I en sentido antihorario, calculemos el campo magnetico en el origen.



$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\, d\vec{l}\,' \times (\vec{0} - r'\hat{r})}{r'^3}$$

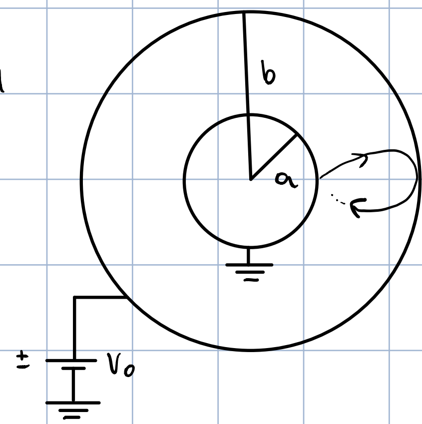
Aquí $d\vec{l}\,'$ es un poco más complicado, porque nos estamos moviendo en r y θ. Entonces $d\vec{l}\,' = dr'\hat{r} + r'd\theta'\hat{\theta} = d\theta'\left(\frac{dr'}{d\theta'}\hat{r} + r'\hat{\theta}\right) = d\theta'\left(\frac{\hat{r}}{2\pi} + r'\hat{\theta}\right)$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2n\pi} \frac{I\, d\theta'\left(\frac{\hat{r}}{2\pi} + r'\hat{\theta}\right) \times (-r'\hat{r})}{r'^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot I\int_0^{2n\pi} d\theta' \frac{\hat{z}}{\frac{\theta}{2\pi}+1}$$

$$= \frac{\mu_0}{\cancel{4\pi}_{\,2}}\cdot I \cdot \cancel{2\pi}\,\hat{z}\ln(n+1) = \frac{\mu_0}{2} I \hat{z} \ln(n+1)$$

P_2

Tenemos un electrón con velocidad inicial $v_0 \approx 0$, en un campo magnetico $\vec{B} = B\hat{z}$ entre 2 conductores con diferencia de potencial (leer enunciado)



Queremos que la partícula haga una trayectoria tal que justo no choca con el conductor de radio b. Para ello la velocidad en $r=b$ debe ser tangencial al cilindro, o sea $\vec{v}$ apunta en $\hat{\theta}$ para dicho punto.

El momentum angular de la partícula cambia según:

torque

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{r} \times -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Aquí, como hay simetría cilíndrica $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ y como $\vec{v}$ pertenece al plano (enunciado) $\dot{z} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = r\hat{r} \times -e\left(E(r)\hat{r} + (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \times B\hat{z}\right) = r\hat{r} \times -e\left\{E(r)\hat{r} + B(-\dot{r}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\hat{r})\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = eBr\frac{dr}{dt}\hat{z} \qquad / \int dt \quad \Rightarrow \quad \vec{L}(r) - \vec{L}_0 = \frac{eB}{2}(r^2 - a^2)$$

Como $v_0 \approx 0$ podemos tomar $\vec{L}_0 = 0$ sin problemas.

Luego en $r = b$, la velocidad debe apuntar en $\hat{\theta}$ para que no choque, por lo que en $r = b$, $\vec{v} = v(b)\,\hat{\theta}$

$$\Rightarrow \vec{L}(b) = b\hat{r} \times m\vec{v}(b) = m b\, v(b)\,\hat{z} = \frac{eB}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

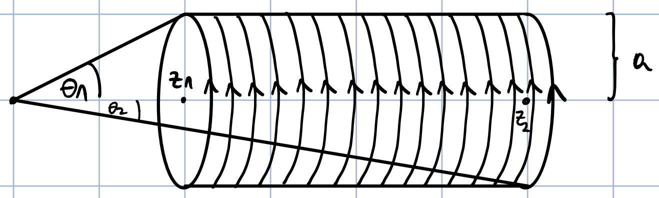
y ahora solo falta despejar $v(b)$ para poder llegar a una ecuación para B. Para ello usamos la conservación de energía.

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{m}{2}\cancelto{0}{v_0^2} - \cancelto{0}{eV(r=a)} = \frac{m}{2}v^2(b) - e\overbrace{V(r=b)}^{V_0} \Rightarrow v(b) = \left(\frac{2eV_0}{m}\right)^{1/2}$$

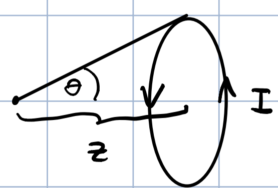
y por lo tanto el campo $\vec{B}$ que satisface esta trayectoria esta dado por:

$$mb\left(\frac{2eV_0}{m}\right)^{1/2} = \frac{eB}{2}\left(b^2 - a^2\right) \Rightarrow B = \frac{2mb}{e\left(b^2 - a^2\right)}\left(\frac{2eV_0}{m}\right)^{1/2} \quad //$$

P3 Calculemos el campo generado por una bobina cilíndrica de radio a con una densidad de n vueltas por unidad de largo.



Una bobina es una colección de espiras circulares. Por esto calculamos el campo generado por un circuito circular a una distancia z. Luego la bobina será resultado de sumar sobre varios circuitos.



$$\vec{B}(z\hat{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I a d\theta \hat{\theta} \times (z\hat{z} - a\hat{r})}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{I a d\theta (\cancel{z\hat{r}}^{\,0} + a\hat{z})}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2\hat{z}}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

Luego en nuestro caso tenemos una densidad de vueltas n, así que en un dz, tenemos $n dz$ circuitos y la corriente total que circula sería $dI = I n dz$, entonces el campo generado por un diferencial dz de la bobina $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I n dz}{2}\frac{a^2\hat{z}}{(a^2+z^2)^{3/2}}$

$$\Rightarrow \vec{B}_{TOT} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} I n a^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{\hat{z}\, dz}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

Aquí $z = a\cot g\theta \Rightarrow dz = a \cdot -\csc^2\theta\, d\theta$

$$\Rightarrow \vec{B}_{TOT} = \frac{\mu_0}{2} I n \cancel{a^3} \hat{z} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-\csc^2\theta \, d\theta}{\cancel{a^3}(1+\cot g^2\theta)^{3/2}} \quad \text{PERO}, \quad 1+\cot g^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{TOT} = \frac{\mu_0}{2} I n \hat{z} \int_{\theta_1}^{\theta_2} -\sin\theta \, d\theta = \frac{\mu_0 I n}{2} \hat{z} \left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1 \right)$$