26/4/21 # Aux #8 Electro.

P1

a) Este problema posee simetría esférica, por lo que esperamos que los campos solo dependan de r en dirección $\hat{r}$. Como es usual, nos daremos una carga Q en el conductor en su superficie y al final veremos cuanto vale haciendo la integral del potencial.

- Para $r < R_1$: $\vec{D} = 0$ y $\vec{E} = 0$ porque es un conductor

- Para $R_1 < r < R_2$: usamos Gauss en medios materiales:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_\ell \Rightarrow$$ integro en una superficie esférica de radio r concéntrica al sistema

$$\iint D(r) r^2 d\theta d\phi = 4\pi r^2 D(r) = Q \Rightarrow \boxed{\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}}$$

Sabemos que $\vec{D}(r) = \varepsilon \vec{E}(r) \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}}$ y que $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = \frac{Q(\varepsilon - \varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}}$$

- Para $r > R_2$ lo mismo que antes pero en el vacío ($\varepsilon = \varepsilon_0$)

$$\oint \vec{D}(r) r^2 d\theta d\phi = 4\pi r^2 D(r) = Q \rightarrow \boxed{\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

$\Rightarrow$ resultado esperado $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = 0$ // no hay polarización en el vacío.

falta Q: $V_0 = V(R_1) - V(\infty) = -\int_\infty^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\left[\int_\infty^{R_2} E\, dr + \int_{R_2}^{R_1} E\, dr\right]$

$$V_0 = -\left[-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon R_1} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon R_2}\right] \Rightarrow \boxed{Q = \frac{V_0 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{\varepsilon_0 R_2 + (\varepsilon - \varepsilon_0) R_1}}$$

b) Queremos las densidades de carga de polarización, estas pueden ser superficiales y volumétricas.

Tenemos 2 superficies: en $r=R_1$ y $r=R_2$:

$$\sigma_p(R_1) = \vec{P}(R_1)\cdot\underbrace{\hat{n}}_{\text{vector normal a la sup. del Material}} = \vec{P}(R_1)\cdot(-\hat{r}) = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\frac{Q}{4\pi R_1^2}\hat{r}\cdot-\hat{r} = \frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon}\frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

$$\sigma_p(R_2) = \vec{P}(R_2)\cdot\hat{n} = \vec{P}(R_2)\cdot\hat{r} = \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

$$\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon}\frac{Q}{4\pi \cancel{r^2}}\right) = 0$$ ya que el derivando es constante.

Así, la carga total de polarización será:

$$Q_p = \sigma_p(R_1)S_1 + \sigma_p(R_2)\cdot S_2 + \cancel{\rho_p}^{\,0}\cdot V = -\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\frac{Q}{\cancel{4\pi R_1^2}}\cdot\cancel{4\pi R_1^2} + \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\frac{Q}{\cancel{4\pi R_2^2}}\cancel{4\pi R_2^2}$$

$$Q_p = 0$$

c) ¿la carga en el centro aumenta o disminuye? Veamos el cálculo que hicimos antes

$$Q = \frac{V_0 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1R_2}{\varepsilon_0R_2+(\varepsilon-\varepsilon_0)R_1}$$ ¿y sin dieléctricos? el calculo es análogo pero es el mismo $E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$Q_{sin} = 4\pi\varepsilon_0V_0R_1 \Rightarrow \Delta Q = Q - Q_{sin} = \frac{V_0 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1R_2}{\varepsilon_0R_2+(\varepsilon-\varepsilon_0)R_1} - 4\pi\varepsilon_0V_0R_1$$

$$\Delta Q = \frac{4\pi\varepsilon_0V_0R_1(\varepsilon-\varepsilon_0)(R_2-R_1)}{\varepsilon_0R_2+(\varepsilon-\varepsilon_0)R_1}$$, como $\varepsilon>\varepsilon_0$ y $R_2>R_1$, entonces concluimos que aumenta la carga

d) ¿y la energía almacenada? $U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 dV \wedge U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}\,dV$

no grax... hagamos algo más fácil. Para un condensador sabemos que su energía almacenada es

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

en nuestro caso tenemos un condensador esférico con la otra placa en $r \to \infty$, por lo que

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{V_0 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1R_2}{\varepsilon_0R_2+(\varepsilon-\varepsilon_0)R_1}\cdot V_0\cdot\frac{1}{2} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1R_2V_0^2}{\varepsilon_0R_2+(\varepsilon-\varepsilon_0)R_1}$$ energía almacenada.

De hecho puedo calcular la capacitancia $Q = \frac{V_0 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1R_2}{\varepsilon_0R_2+(\varepsilon-\varepsilon_0)R_1} \Leftrightarrow Q = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1R_2}{\varepsilon_0R_2+(\varepsilon-\varepsilon_0)R_1}\cdot V_0$

C lol :)

Así, la variación de la energía será:

$$\Delta U_e = U_e - U_{e\,sin} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1R_2V_0^2}{\varepsilon_0R_2+(\varepsilon-\varepsilon_0)R_1} - 2\pi\varepsilon_0R_1V_0^2$$

$$\Delta U_e = \frac{2\pi\varepsilon_0V_0^2(\varepsilon-\varepsilon_0)R_1(R_2-R_1)}{\varepsilon_0R_2+(\varepsilon-\varepsilon_0)R_1} > 0 \text{ aumenta.}$$

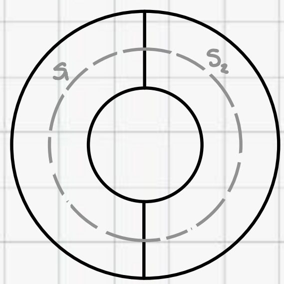
P2

Al igual que el problema anterior tenemos simetría esférica. Además como tenemos un cambio de medio podemos analizar las condiciones de borde:

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2)\cdot\hat{n} = \sigma_p \quad \wedge \quad (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\cdot\hat{t} = 0$$

donde $\hat{n}$ es un vector normal a la superficie y $\hat{t}$ un vecto tangencial. En este caso $\hat{t}$ vive en el plano que forma $\hat{r}$ evaluado en $\phi \in \{0, \pi\} \wedge \forall\theta$ es por esto que sabemos que de cualquier manera el campo es continuo en $\hat{r}$, justificando así la simetría esférica.

a) Usamos ley de Gauss $\Rightarrow \oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q \Rightarrow \int_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q$



$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} D_1(r) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi + \int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\pi} D_2(r) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = Q$$

Sabemos que $D_1 = \varepsilon_1 E$ y $D_2 = \varepsilon_2 E$

$$\Rightarrow 2\pi r^2 \varepsilon_1 E(r) + 2\pi r^2 \varepsilon_2 E(r) = Q \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2) r^2}\hat{r}$$

b) $\Delta V = -\int_b^a \vec{E}\cdot dr$ desde la carga negativa a la positiva

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) //$$

c) Queremos I, para eso necesito $\vec{J} = g\vec{E}$ (Ley de Ohm)

$$I = \int_{S_1} \vec{J}\cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{J}\cdot d\vec{s} = \int_{S_1} g_1 \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{S_2} g_2 \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

4

$$\Rightarrow I = \frac{(g_1+g_2)}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\int \frac{Q}{2\pi r^2}\hat{r}\cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow I = \frac{g_2+g_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\cdot\frac{Q}{\cancel{2\pi r^2}}\cdot\cancel{2\pi r^2} = \frac{g_2+g_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} Q //$$

d) $I = \frac{g_2+g_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} Q$ pero $Q = \frac{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)V}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{g_2+g_1}{\cancel{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \cdot \frac{2\pi\cancel{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)} V = \frac{g_1+g_2}{\left(\frac{b-a}{ab}\right)} \cdot 2\pi \cdot V$$

Sabemos que $V = I \cdot R \Rightarrow R = \frac{V}{I}$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{b-a}{2\pi ab(g_1+g_2)} \quad //$$