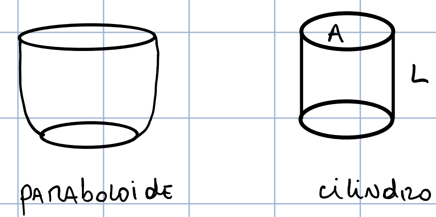
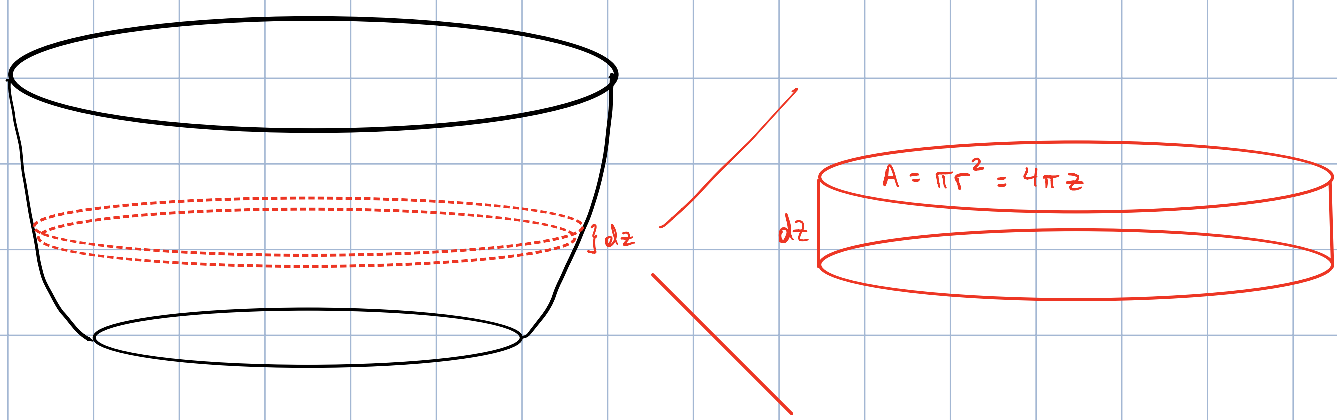
P1

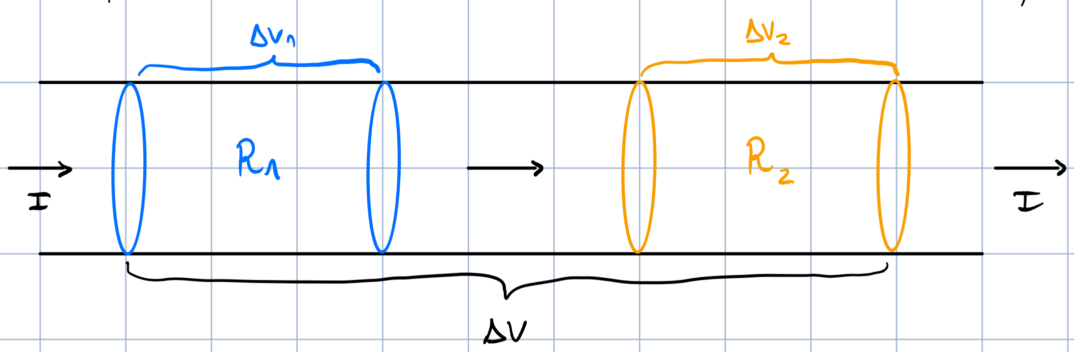
Consideramos un medio conductor con forma de paraboloide que cumple $x^2 + y^2 = 4z$, $z \in [z_1, z_2]$. Para calcular la resistencia total, usaremos la formula para una resistencia cilíndrica $R = \frac{L}{\sigma A}$

Obviamente un cilindro y un paraboloide no son lo mismo, lo que haremos sera dividir el paraboloide en secciones de altura dz.





Para utilizar esta división debemos calcular la resistencia de muchos cilindros y con ella inferir la resistencia total. Consideremos el caso simplificado de una resistencia seguida de otra, o sea en serie.



Dado que se conserva la corriente, por ambas resistencias pasa I.

Luego, usando la ley de Ohm $\Delta V = IR$ con R la resistencia total.

Pero del dibujo $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = I(R_1 + R_2) \Rightarrow R = R_1 + R_2$. A la resistencia R se le conoce como la resistencia equivalente.

Entonces la resistencia de nuestro paraboloide la calculamos sumando las resistencias de los cilindros de alto dz, iguales a $dR = \frac{dz}{\sigma A}$. Como dR es infinitesimal, la suma es una integral

$$R_{TOT} = \int dR = \int \frac{dz}{\sigma \underbrace{\pi r^2}_{A}} \overset{r^2 = 4z}{=} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{4\pi\sigma z} = \frac{1}{4\pi\sigma} \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

Con lo que ya tenemos el resultado! Hay otras formas de hacer este cálculo, pero esta es probablemente la más fácil.

P2

Asumimos que la corriente es uniforme $\vec{J} = J_0 \hat{x}$ en el semiconductor. Entonces como el campo electrico cumple $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{g(x)}$ podemos determinar Jo de:

$$V(x=\ell) - V(x=0) = -\int_0^\ell \vec{E}(x) \cdot dx\hat{x} \Rightarrow -V_0 = -\int_0^\ell \frac{J_0}{g_0} e^{-x/\ell} dx = \frac{J_0}{g_0} \ell \left(e^{-1} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow J_0 = \frac{g_0 V_0}{\ell} \cdot \frac{1}{1 - e^{-1}}$$

Luego, la corriente total I que pasa por una sección transversal esta dada por $I = \int_{\text{circulo}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = J_0 \pi a^2$

$$\Rightarrow R = \frac{V}{I} = \frac{\ell (1 - e^{-1})}{g_0 \pi a^2}$$

b) Calculamos $V(x)$ como:

$$V(x) - V(x=0) = -\int_0^x \vec{E}(x') dx' = -\int_0^x \frac{J_0}{g_0} e^{-x'/\ell} dx' = \frac{J_0}{g_0} \ell \left(e^{-x/\ell} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow V(x) = V_0 \left(1 - \frac{1 - e^{-x/\ell}}{1 - e^{-1}} \right)$$

c) Las cargas libres las calculamos de $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell$ con $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\Rightarrow \rho_\ell = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{-\varepsilon_0 J_0}{g_0 \ell} e^{-x/\ell} = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{\ell^2 (1 - e^{-1})} e^{-x/\ell}$$

Además, en los bordes entre el semiconductor y los conductores, hay una discontinuidad del campo, pues $\vec{E}=0$ en los conductores y por lo tanto hay densidades de carga superficial.

apunta hacia afuera del conductor

$$\sigma_{x=0} = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{x}\Big|_{x=0} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{\ell(1-e^{-1})} \quad ; \quad \sigma_{x=\ell} = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot(-\hat{x}) = \frac{-\varepsilon_0 V_0 e^{-1}}{\ell(1-e^{-1})}$$

d) En el regimen estacionario, los campos no cambian en el tiempo, por lo que la energía electrostatica tampoco. Sin embargo, si se disipa energía, debido al efecto Joule, con una potencia dada por:

$$P = \int \vec{E}\cdot\vec{J}\,d\tau = \pi a^2 \int_0^\ell \frac{J_0^2}{g(x)}\,dx = \pi a^2 \int_0^\ell \frac{J_0^2}{g_0} e^{-x/\ell}\,dx = \pi a^2 \cdot \left[\frac{g_0 V_0}{\ell}\cdot\frac{1}{1-e^{-1}}\right]^2 \frac{1-e^{-1}}{g_0}\ell$$

$$= \frac{g_0 V_0^2}{\ell}\,\frac{\pi a^2}{1-e^{-1}} = IV$$

La energía proviene de la batería que mantiene el potencial constante entre $x=0$ y $x=\ell$.

e) Cuando se desconecta la batería, comienza a disiparse la energía electrostatica y por lo tanto los campos comienzan a decaer. Esto implica que la diferencia de potencial comienza a disminuir hasta llegar a 0. Esto significa que las cargas libres deben desplazarse de forma que ahora el material semiconductor sea neutro. En particular, las cargas positivas del lado derecho irán hacia la derecha y las negativas del volumen y del lado derecho iran hacia la izquierda.

f) La variación de energía electrostatica entre el inicio y el final es:

$$\cancel{U_{final}}^{\,0} - U_{inicial} = -\int \frac{\varepsilon_0}{2} E^2_{inicial}\, d\tau = -\pi a^2 \cdot \frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^{\ell} \left\{ \frac{V_0 e^{-x/\ell}}{\ell(1-e^{-1})} \right\}^2 dx$$

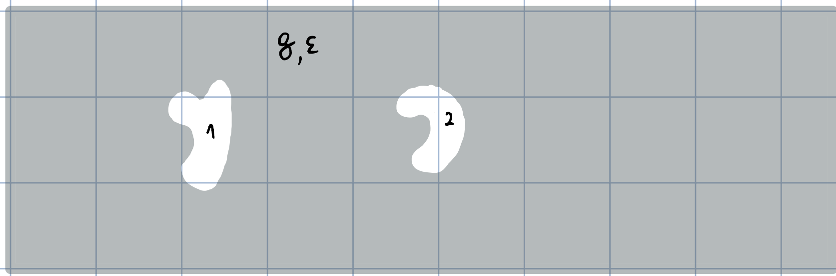
$$= -\pi a^2 \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{V_0^2}{\ell^2(1-e^{-1})^2} \cdot -\frac{\ell}{2} e^{-2x/\ell} \Big|_0^{\ell} = -\pi a^2 \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{V_0^2}{\ell(1-e^{-1})} \cdot (1-e^{-2})$$

Por otro la energía total disipada por efecto Joule es la integral temporal de la potencia

$$U_{disipada} = \int P\, dt = \int -\frac{dU_e}{dt}\, dt = U_{inicial} - \cancel{U_{final}}^{\,0} = \pi a^2 \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{V_0^2}{\ell(1-e^{-1})} \cdot (1-e^{-2})$$

Estas cantidades tienen signos opuestos, porque la pérdida de energía electrostatica se asocia a la disipación por efecto Joule.

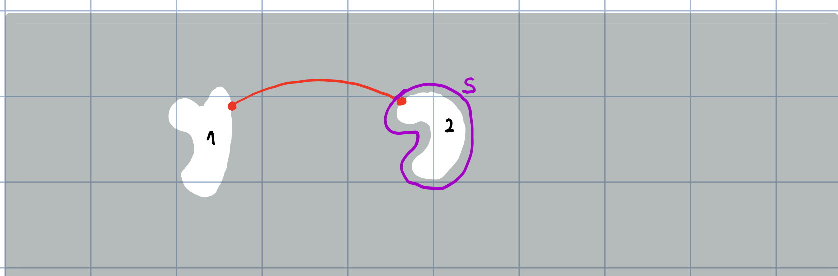
P_3



EN UN SISTEMA ASÍ, I Y ΔV SON PROPORCIONALES Y SE CALCULAN COMO:

$$\Delta V = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \qquad\qquad I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = g \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

LA INTEGRAL DE ΔV LA DEBEMOS HACER SOBRE CUALQUIER CAMINO ENTRE 1 Y 2. LA INTEGRAL DE I DEBE HACERSE SOBRE UNA SUPERFICIE QUE PERMITA CALCULAR EL FLUJO DE CARGAS. LA MÁS ÚTIL ES LA QUE ENCIERRA A UNO DE LOS CONDUCTORES SOLAMENTE



AHORA, COMO QUEREMOS LLEGAR A UNA RELACIÓN CON LA CAPACITANCIA, RECORDAMOS QUE $Q = C\Delta V \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{C}$

$$\Rightarrow R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{Q}{CI}$$

CON Q LA CARGA EN UNO DE LOS CONDUCTORES. ESTA LA PODEMOS CALCULAR

A partir de la ley de Gauss para medios dieléctricos.

para nuestro caso

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \Rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_f \Rightarrow \varepsilon \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q$$

$$\Rightarrow R = \frac{Q}{CI} = \frac{\varepsilon}{C g} \cdot \frac{\cancel{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}}}{\cancel{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}}} \Rightarrow RC = \frac{\varepsilon}{g}$$