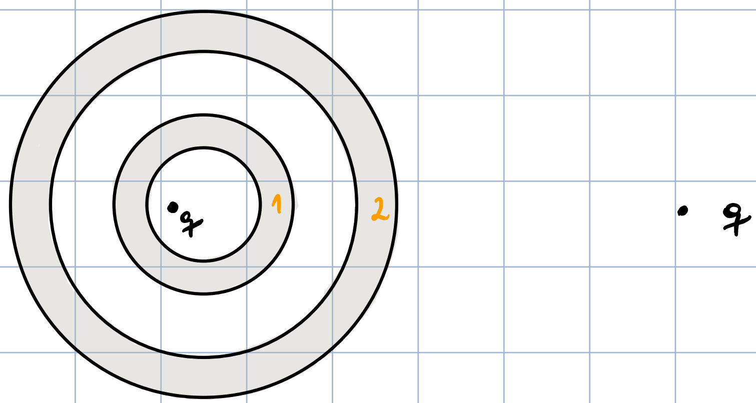
Auxiliar 4

P1



a) Vamos capa por capa, partiendo por la capa interna del conductor 1. Consideramos una superficie imaginaria dentro del conductor 1 y aplicamos la ley de Gauss. El campo eléctrico $\vec{E}$ es nulo dentro del conductor así que la carga encerrada debe ser nula.

$$Q_{enc} = 0 = q + q^1_{int} \Rightarrow q^1_{int} = -q$$

Esta carga no se distribuye uniformemente porque la condición es $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{n}\big|_{borde}$ y $\vec{E}$ es mas intenso cerca de la carga q, entonces la carga negativa se concentrara en mayor medida cerca de la carga q.

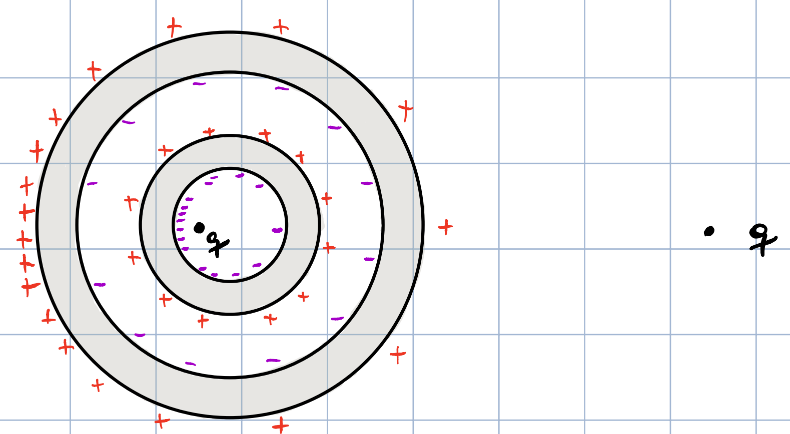
Luego, el conductor interno debe ser neutro, así que la carga en la superficie externa debe ser $+q$. Esta carga se debe distribuir de manera uniforme porque de lo contrario no se puede asegurar que $\vec{E} = 0$ dentro del conductor 1.

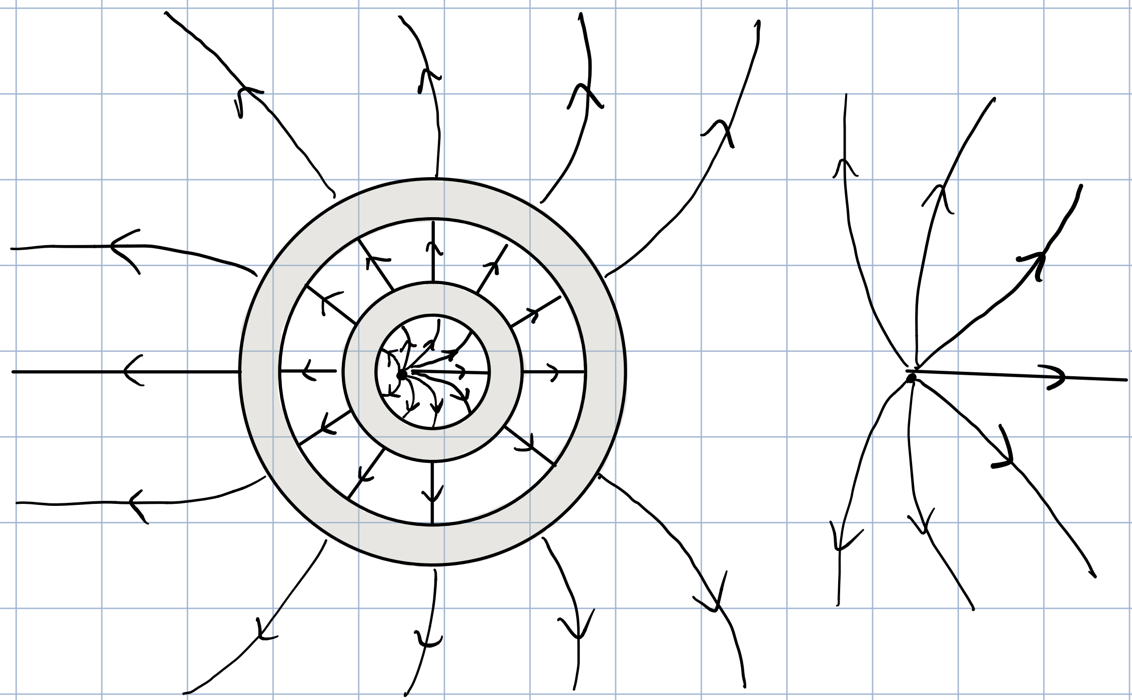
Para el conductor 2, en la superficie interior la carga la podemos determinar con la ley de Gauss de forma analoga. Si consideramos una superficie en medio del conductor 2, nuevamente $\vec{E}=0$, así que la carga encerrada es 0.

$$Q_{enc} = 0 = q + \cancelto{-q}{q^1_{int}} + \cancelto{q}{q^1_{ext}} + q^2_{int} \Rightarrow q^2_{int} = -q$$

En la superficie se cumple $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{n}\big|_{borde}$ donde $\vec{E}$ sería el generado por q^1_{ext}, que es uniforme, así que q^2_{int} se distribuye de manera uniforme.

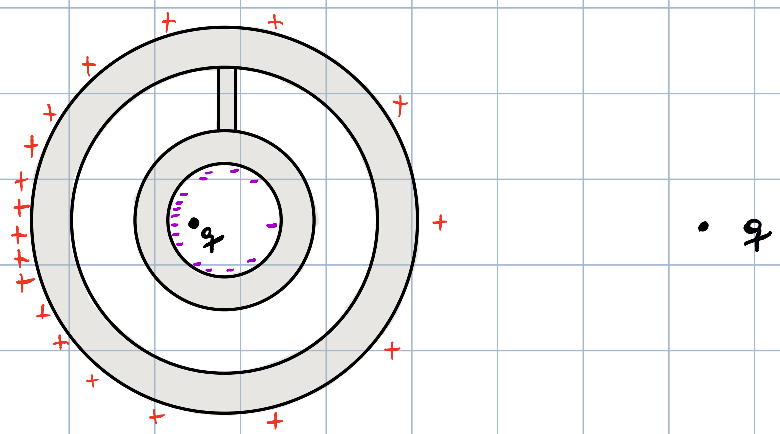
Nuevamente el conductor 2 es neutro, así que $q^2_{ext} = q$. En esta superficie el campo no es uniforme debido a la carga q que esta a la derecha. Esta carga repele las cargas positivas en el conductor 2 y en consecuencia se acumularan en mayor medida en el hemisferio opuesto. Teniendo en cuenta todo lo anterior.

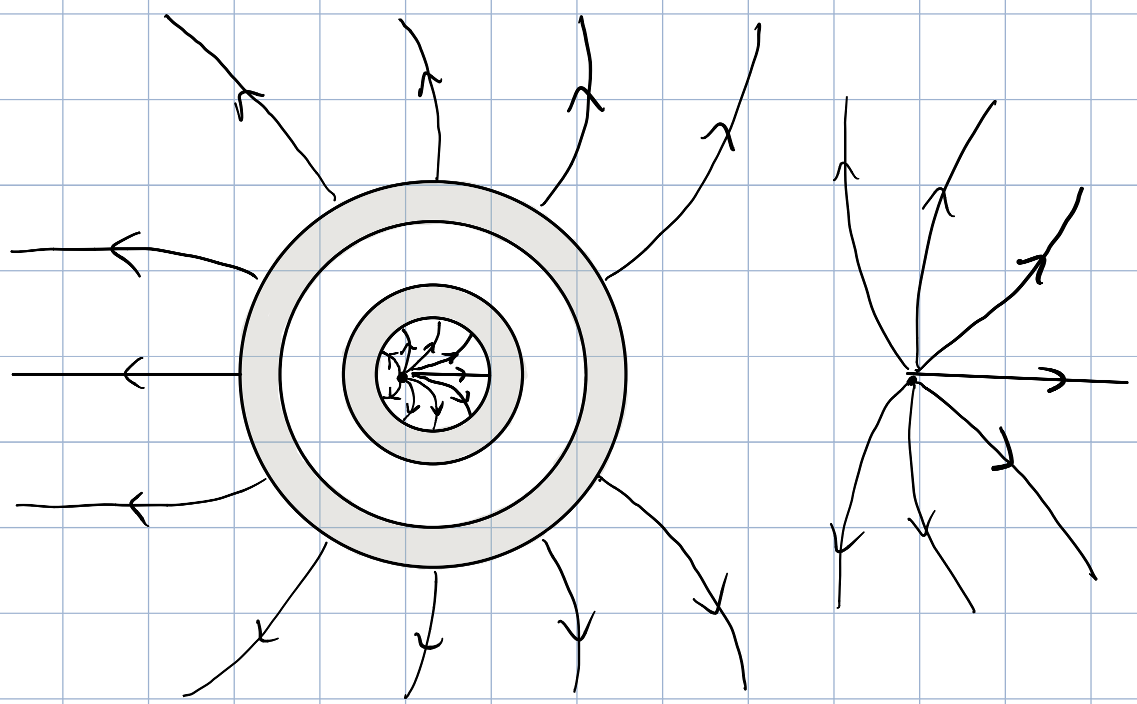




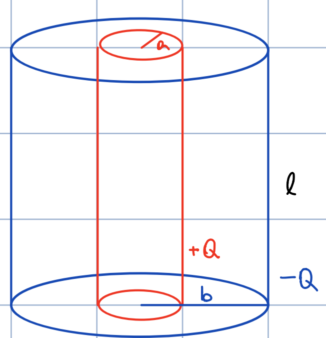
b) Como ahora ambos conductores estan conectados es como si fueran uno solo. Entonces, como un conductor es una superficie equipotencial, no puede haber campo entre la superficie interna del conductor 2 y la externa del conductor 1, pues eso produciría una diferencia de potencial entre estas 2 superficies, lo cual sería una contradicción. Para que no haya campo no debe acumularse cargas en las superficies anteriormente mencionadas.

El resto de los argumentos son analogos al caso anterior. Por Gauss sabemos que la superficie interior se debe cargar con una carga $-q$ y no esta uniformemente distribuida debido a que la carga q no esta centrada. El conductor sigue teniendo que ser neutro, así que la carga en la superficie exterior es $+q$.





P_2 Consideramos un condensador de placas cilíndricas como el del dibujo



Para calcular la capacitancia necesitamos la diferencia de potencial entre los 2 conductores, la cual calculamos como la integral de línea del campo $V = -\int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$, donde los límites de integración van desde la placa negativa a la positiva.

El campo $\vec{E}$ entre las placas, lo calculamos con la ley de Gauss. Si consideramos un cilindro de radio r tal que $a<r<b$ y de altura l como superficie de integración, la ley de Gauss nos dice que:

por simetría $\vec{E} = E(r)\hat{r}$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2\pi r l E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q\hat{r}}{2\pi\varepsilon_0 r l}$$

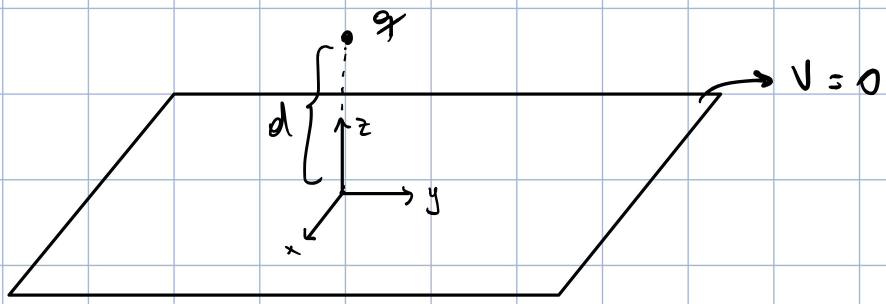
$$\Rightarrow V = -\int_{(-)}^{(+)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_b^a \frac{Q\hat{r}}{2\pi\varepsilon_0 l r}\cdot dr\hat{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln(r)\Big|_a^b = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)} \Rightarrow \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)} \equiv \text{capacitancia por unidad de largo}$$

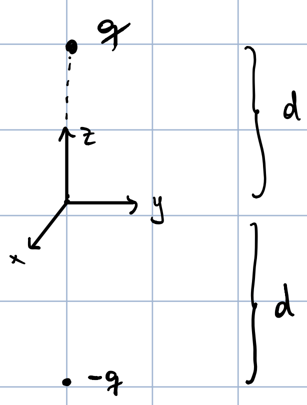
Lo cual responde la pregunta ✓

P3

Este problema se puede resolver de muchas maneras, muchas de ellas fuera de lo que vemos en este curso. Sin embargo, hay una idea que da pie a un método, inspirada en el problema siguiente



La condición a cumplir es que $V(x,y,z=0) = 0$ y $V(\infty) = 0$ y si encontramos un potencial que cumpla esa condición estamos listos. Una respuesta posible es fácil de encontrar si nos olvidamos del conductor y consideramos una configuración típica de electrostática, que son 2 cargas de igual magnitud pero de signos opuestos.



Por principio de superposición el potencial de este sistema es:

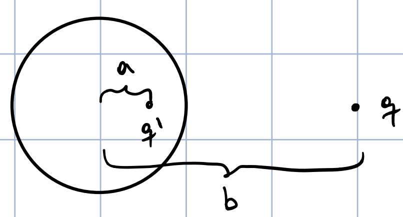
$$V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{-1/2} - \left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{-1/2} \right\}$$

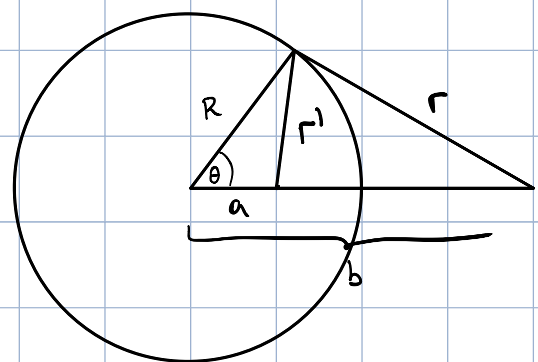
$$\Rightarrow V(x,y,z=0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \left(x^2+y^2+d^2\right)^{-1/2} - \left(x^2+y^2+d^2\right)^{-1/2} \right\} = 0$$

cumple con la condición

La gracia es que el potencial es único, es decir no hay otro potencial que cumpla esta condición y entonces este es la única solución. Esto se sustenta en un teorema de unicidad para la ecuación $\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ que define a V. No es necesario que sepan estos detalles

Lo anterior nos da una idea de como abordar este problema. Aquí proponemos que la carga imagen esta a una distancia a del centro y tiene una cara q'. Con a y q' a determinar.





Por teorema del coseno

$$r'(\theta) = \left(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta\right)^{1/2} \quad ; \quad r(\theta) = \left(R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta\right)^{1/2}$$

y entonces el potencial neto en la superficie de la esfera sería:

$$V(R,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r(\theta)} + \frac{q'}{r'(\theta)}\right) = 0$$

Si evaluamos en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ podemos despejar q' y r'

$$V(R,0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{(R^2+b^2-2Rb)^{1/2}} + \frac{q'}{(R^2+a^2-2Ra)^{1/2}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{b-R} + \frac{q'}{R-a}\right) = 0$$

$$V(R,\pi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{(R^2+b^2+2Rb)^{1/2}} + \frac{q'}{(R^2+a^2+2Ra)^{1/2}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R+b} + \frac{q'}{R+a}\right) = 0$$

De la primera ecuación $q' = -q\,\frac{R-a}{b-R}$, lo cual reemplazando en la segunda nos da que:

$$\frac{q}{R+b} - \frac{q}{R+a}\,\frac{R-a}{b-R} = 0 \Rightarrow (R+a)(b-R) - (R-a)(R+b) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{bR} - R^2 + ab - \cancel{aR} - (R^2 - \cancel{aR} + \cancel{bR} - ab) = 0 \Rightarrow 2R^2 = 2ab$$

$$\Rightarrow a = \frac{R^2}{b} \Rightarrow q' = -q\,\frac{R-\frac{R^2}{b}}{b-R} = -q\,\frac{R}{b}\,\frac{(b-R)}{b-R} = -q\,\frac{R}{b}$$

Para un radio y ángulo r,θ cualquiera el potencial sería entonces

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r(r,\theta)} + \frac{q'}{r'(r,\theta)}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{(r^2+b^2-2rb\cos\theta)^{1/2}} + \frac{q'}{(r^2+a^2-2ra\cos\theta)^{1/2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{(r^2+b^2-2rb\cos\theta)^{1/2}} - \frac{R}{b}\,\frac{q}{\left(r^2+\frac{R^4}{b^2}-2r\frac{R^2}{b}\cos\theta\right)^{1/2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{(r^2+b^2-2rb\cos\theta)^{1/2}} - \frac{q}{\left(\left(\frac{rb}{R}\right)^2+R^2-2rb\cos\theta\right)^{1/2}}\right\}$$

Es verificable que para $r = R$ obtenemos $V = 0$ y por lo tanto obtuvimos la solución del problema. La carga superficial sería:

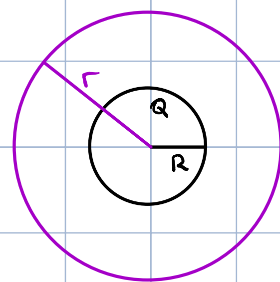
$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}\bigg|_{\text{borde}} = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r}\bigg|_{r=R} = +\frac{q}{4\pi}\left\{ \frac{r - b\cos\theta}{(r^2+b^2-2rb\cos\theta)^{3/2}} - \frac{r\frac{b^2}{R^2} - b\cos\theta}{\left(\left(r\frac{b}{R}\right)^2 + R^2 - 2rb\cos\theta\right)^{3/2}} \right\}\bigg|_{r=R}$$

$$\Rightarrow \sigma(\theta) = \frac{q}{4\pi} \frac{R - \frac{b^2}{R}}{(R^2+b^2-2Rb\cos\theta)^{3/2}}$$

P4 COMENZAMOS POR CONSIDERAR UN CASCARÓN ESFÉRICO DE RADIO R CON UNA CARGA Q distribuida DE MANERA UNIFORME EN SU SUPERFICIE.

a) PARA CALCULAR EL CAMPO ELÉCTRICO, CONSIDERAMOS QUE DEBIDO A LA SIMETRÍA ESFÉRI-, $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}$ Y POR LO TANTO PODEMOS APLICAR LA LEY DE GAUSS. LA SUPERFICIE DE INTEGRACIÓN QUE CONSIDERAMOS SERÍA UNA ESFERA DE RADIO $r > R$ ARBITRARIO

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int E(r)\,\hat{r}\cdot ds\,\hat{r} = E(r)\int ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



$$\Rightarrow \quad 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q\,\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

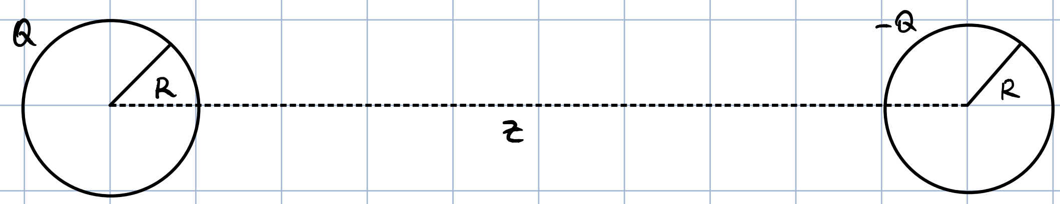
ESO SERÍA PARA $r > R$. EN EL CASO $r < R$, LA CARGA ENCERRADA ES NULA, ASÍ QUE $\vec{E}(\vec{r}) = 0$ PARA $r < R$. EL POTENCIAL ELÉCTRICO LO CALCULAMOS CON EL PUNTO DE REFERENCIA EN EL INFINITO.

$$\Rightarrow \quad V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} E(\vec{r}\,')\cdot d\vec{\ell}\,' = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q\,\hat{r}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\cdot dr'\,\hat{r}' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad r > R$$

b) LA ENERGÍA LA CALCULAMOS CON LA FÓRMULA $U = \frac{1}{2}\int dq(\vec{r})\,V(\vec{r})$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}\int \sigma\cdot R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\int \sigma\, ds = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

c) Ahora consideramos 2 cascarones con cargas opuestas, separados una distancia $z \gg 2R$. Las esferas comienzan inicialmente en reposo y tienen masa M.



Para calcular la energía en este caso usamos la expresión:

$$U = \frac{1}{2}\int dq\, V$$

En este caso $dq = \sigma\, ds$ con $\sigma(\vec{r}) = \sigma_+ + \sigma_-$, las cargas de cada cada esfera y $V(\vec{r}) = V_+ + V_- = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$ por principio de superposición, es la suma de los potenciales de cada esfera.

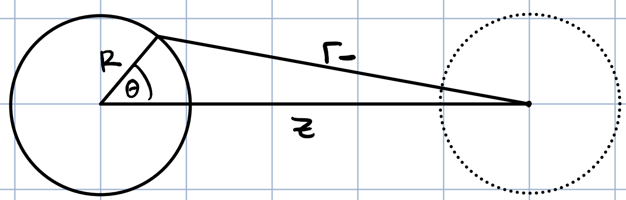
$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}\int (\sigma_+ + \sigma_-)(V_+ + V_-)\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\int \sigma_- V_- \, ds + \int \sigma_+ V_+ \, ds}_{\text{ENERGÍA DE CADA ESFERA}} + \overbrace{\int \sigma_+ V_- \, ds + \int \sigma_- V_+ \, ds}^{\text{ENERGÍA DE INTERACCIÓN}} \Big]$$

Las energías de cada esfera ya las calculamos. Para las otras dos integrales, por simetría deben ser iguales.

$$\int \sigma_+ V_- \, ds + \int \sigma_- V_+ \, ds = 2\int \sigma_+ V_- \, ds = 2\int \frac{Q}{4\pi R^2}\cdot\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$$

Aquí r_- lo obtenemos del teorema del coseno



$$r_-(\theta) = \left(z^2+R^2-2zR\cos\theta\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\int \sigma_+ V_- \, ds = 2\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \cancel{R^2}\sin\theta \, d\theta \, \frac{-Q^2}{4\pi \cancel{R^2}}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r_-(\theta)}$$

$$= \cancel{2}\cdot\cancel{2\pi}\cdot\frac{-Q^2}{\cancel{4\pi}}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta \, d\theta}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta)^{1/2}} = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{zR}\left(z+R-(z-R)\right) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 z}$$

y entonces reemplazando la energía electrostática total del sistema sería

$$U_{TOT} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 z}$$

La fuerza entre las cargas la podemos calcular como el gradiente de la energía $\vec{F} = -\nabla U \Rightarrow \vec{F} = \frac{-Q^2\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$ lo que es igual a la fuerza entre cargas puntuales.

d) Cuando $z\to\infty$, las esferas están aisladas y la energía es simplemente la de cada cascarón por separado

$$\Rightarrow \quad U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

E) Por simetría, las velocidades de ambas esferas son iguales al momento de tocarse. La conservación de energía dice entonces que:

$$E_i = E_f \quad \Rightarrow \quad U(z=\infty) = K + U(z=2R)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q}{\cancel{4\pi\varepsilon_0 R}} = Mv^2 + \frac{Q^2}{\cancel{4\pi\varepsilon_0 R}} - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2R} \quad \Rightarrow \quad v = \left(\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 M R}\right)^{1/2} \quad //$$