

PREGUNTA 1

a)

Considerando el punto de referencia en α , tenemos que el potencial generado por una carga puntual q a una distancia r (desde la posición de q) está dado por:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Usando el principio de superposición en el problema planteado, tenemos que:

$$V_{\text{tot}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_+} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{r_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \quad (1)$$

Utilizando el teorema del coseno podemos obtener expresiones para r_+ y r_- :

$$(2) \quad r_+ = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta}, \quad r_- = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\pi - \theta)}$$

$$\cos(\pi - \theta) = \cos\pi \cos\theta + \sin\pi \sin\theta = -\cos\theta$$

$$\Rightarrow r_- = \sqrt{r^2 + d^2 + 2rd \cos\theta} \quad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1), obtenemos:

$$V_{\text{tot}}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 + 2rd \cos\theta}} \right)$$

Ahora supongamos que $r \gg d$:

$$(1 + \epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 \pm 2rd \cos\theta}} = \frac{1}{r \sqrt{1 \pm \frac{2d}{r} \cos\theta + \left(\frac{d}{r}\right)^2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{r} \cos\theta + \mathcal{O}\left(\left(\frac{d}{r}\right)^2\right) \right)$$

$$V_{\text{tot}}(\vec{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2d \cos\theta}{r^2} \right); \quad \text{como } \vec{p} = 2dq\hat{z} \wedge \hat{z} \cdot \hat{r} = \cos\theta$$

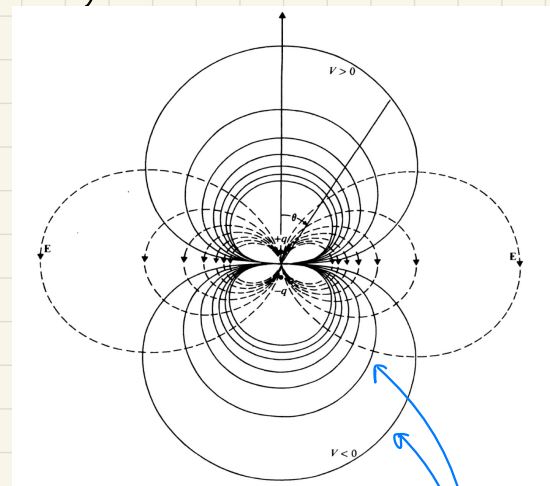
$$\Rightarrow V_{\text{tot}}(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Los niveles equipotenciales cumplen tener V_{tot} constante.

Como $V_{\text{tot}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}$ vemos que para que sea cte es necesario que

$$r^2 = r_0^2 \cos\theta, \text{ con } r_0 \text{ una constante} \Rightarrow \text{los equipotenciales est\u00e1n definidos por: } r = r_0 \sqrt{|\cos\theta|}$$

m\u00f3dulo para que $r > 0$.



L\u00edneas
continuas
del dipolo

b) Como $\vec{E} = -\nabla V$, entonces $\vec{E} = -\nabla \left(\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\nabla \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right)}_{\vec{z}}$

calculemos $\vec{z}$ en esféricos: (calculando el gradiente en esféricos)

$$\vec{z} = -2 \frac{\cos \theta}{r^3} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{(-\sin \theta)}{r^2} \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{+p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

Ahora recordemos que nuestro $\vec{p}$ es $\vec{p} = p \hat{z}$ y además que $\hat{z} \cdot \hat{r} = \cos \theta$.

$$\Rightarrow p \cos \theta = \vec{p} \cdot \hat{r}$$

En estos momentos no se ve tan directo nuestro resultado con el pedido, así que será más fácil hacerlo a lo inverso. Veámoslo como lo del enunciado:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 p r \cos \theta \hat{r} - r^2 p \hat{z}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos \theta \hat{r} - \hat{z})$$

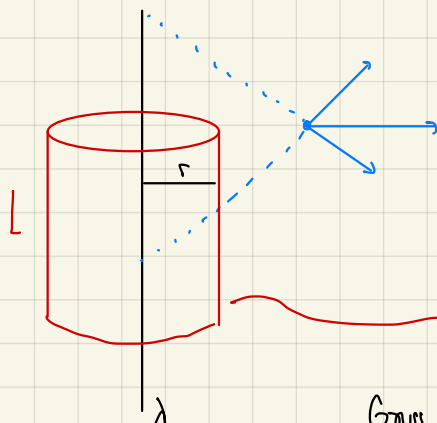
Pero $\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$ en esféricos $\Rightarrow$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos \theta \hat{r} - \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

Llegamos a lo mismo! $\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5} \right]$

c) Para determinar la fuerza sobre el dipolo necesitamos primero calcular el campo eléctrico al que está sometido, que es el que genera el momento.
Consideremos un cilindro infinito como en el dibujo.



Debido a que es infinito, el campo solo va en $\hat{r}$.
Además $\vec{E}$ solo puede depender de r , pues si giras en ϕ o subas en z no vas a diferenciar.
 $\therefore \vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r}$

$\Rightarrow$ Podemos usar Gauss con una superficie que cumple r de: cilindro.

Gauss nos dice: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$

componente radial del $\vec{d}\vec{s}$ en cilíndricas

$$\text{En este caso } \oint \vec{E} \cdot \vec{d}\vec{s} = \oint E(r) \hat{r} \cdot \vec{d}\vec{s} = \int \int E(r) \underbrace{r d\phi dz}_{\text{monto}} = \int_0^L \int_0^{2\pi} E(r) r d\phi dz = E(r) r 2\pi L$$

$$\Rightarrow E(r) r 2\pi L = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}}$$

Ahora, la fuerza sobre el dipolo dividido entre d es dado por la fuerza sobre cada carga puntual:

$$\vec{F} = q \vec{E}(r+d) - q \vec{E}(r-d) = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r+d} - \frac{1}{r-d} \right) \hat{r}$$

Pero: $\frac{1}{r \pm d} = \frac{1}{r(1 \pm d/r)} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{d}{r} + O\left(\frac{d}{r}\right)^2 \right)$

$$\Rightarrow \text{A primer orden en } \frac{d}{r} : \boxed{\vec{F} = -\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{2d}{r} \hat{r} = \frac{-\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}} \quad \begin{matrix} \downarrow p = 2dq \end{matrix}$$

d) Una vez más, partamos desarrollando la ec. del enunciado dado que se ve complicado

$$\vec{F}(\vec{r}) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})$$

Siguiendo el dibujo del enunciado: $\vec{p} = p \hat{r}$, y sabemos que $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r}$, que fue argumentado en una parte anterior.

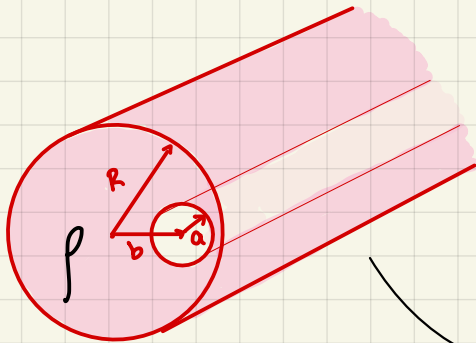
$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = (p \hat{r} \cdot \vec{\nabla}) E(r) \hat{r} = \left(p \frac{\partial}{\partial r} \right) E(r) \hat{r} = p \frac{\partial E(r)}{\partial r} \hat{r}$$

$$\text{Y si tomamos } E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = p \left(\frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} \right) \hat{r}$$

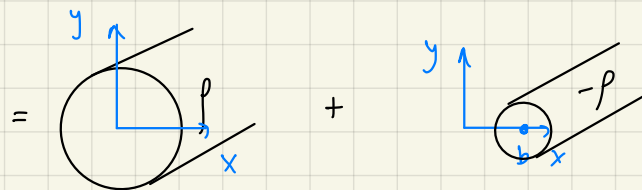
$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}}$$

que fue la misma obtenida en c) $\Rightarrow$ mostramos que puede ser escrito de la forma planteada.

P2

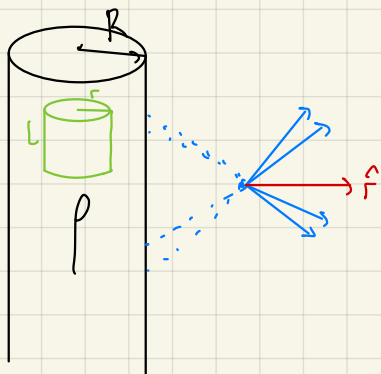


Podemos pensar el sistema como 2 cilindros, de radios R y a cuyos centros están coridos una distancia b y con densidades de carga opuestas:



(Note que de esth manera generamos la configuración del problema).

Luego el problema se reduce a calcular el campo $\vec{E}$ generado por un cilindro infinito con densidad de carga uniforme dentro de él mismo. luego aplicaremos el resultado a cada uno de los cilindros anteriores.



Vemos que por ser cilindro infinito el campo $\vec{E}$ va en $\hat{r}$, pues si encontramos una carga que pareciera generarnos un campo en otra dirección existe otra "simétrica" tal que al sumar los vectores solo sobrevive la componente que va en $\hat{r}$.

Además, si nos situamos en un r dado y subimos o bajamos en z , o giramos en ϕ , no notamos diferencia alguna. Pasándonos en cualquiera de esos puntos vemos la misma. la única diferencia se produce al alejarnos o acercarnos en $\hat{r}$.

$$\Rightarrow \vec{E} = E(r) \hat{r}$$

Dada que el campo es constante para un radio r dado, nos es útil usar Gauss, veamos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad ; \quad \text{tomando la superficie gaussiana en verde:}$$

$$\int E(r) \hat{r} \cdot d\vec{s} = E(r) \int_0^L \int_0^{2\pi} r d\phi dz = E(r) r 2\pi L$$

Y la carga encerrada es:

$$\int \rho dv = \rho \left[\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^r r dr d\phi dz \right] = \rho (\pi r^2) L$$

cilindro verde
 ρ solo porque es homogéneo
el volumen del cilindro

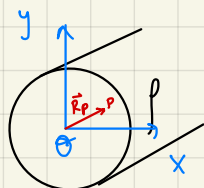
$$\Rightarrow E(r) \cancel{2\pi r} = \frac{\cancel{p} \cancel{r} \cancel{2\pi}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{pr}{2\epsilon_0}$$

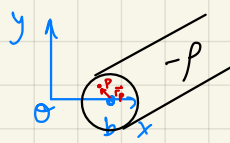
$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{pr}{2\epsilon_0} \hat{r} = \frac{p\vec{r}}{2\epsilon_0}$$

campo dentro del cilindro.

Tenemos:



Cilindro 1



Cilindro 2

Calculamos el campo en un punto cualquiera de la cavidad, P. El mismo punto según el sistema de referencia del cilindro grande está localizada en $\vec{r}_p$, y por el cilindro chico en $\vec{r}_p$. Vamos el campo que genera cada cilindro sobre P.

$$\vec{E}_{cil1}(P) = \frac{p\vec{r}_p}{2\epsilon_0}; \quad \vec{E}_{cil2}(P) = \frac{-p\vec{r}_p}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{TOT}(P) = \frac{p}{2\epsilon_0} (\vec{r}_p - \vec{r}_p)$$

Hagamos un dibujo más de cerca:

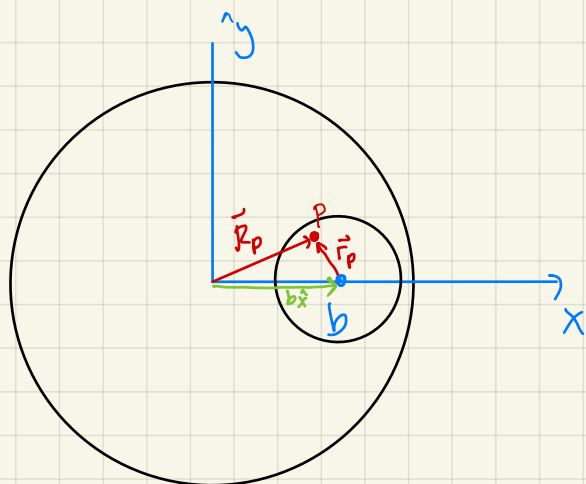
$$\text{Vemos que: } b\hat{x} + \vec{r}_p = \vec{R}_p$$

$$\Leftrightarrow \vec{R}_p - \vec{r}_p = b\hat{x}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{TOT}(P) = \frac{p}{2\epsilon_0} b\hat{x}$$

uniforme!

válido para cualquier punto dentro de la cavidad.



$\Rightarrow$ los líneas de campo $\vec{E}$ dentro de la cavidad deben ir todos paralelos a $\hat{x}$ y separados uniformemente, pues el campo vale lo mismo para cualquier punto. Recuerda que la densidad de líneas se asocia a la intensidad de E .

separados por una misma distancia

