Solución P1 C2.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{l_B}{2R} \Rightarrow l_B = 2R\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{l_A}{2R} \Rightarrow l_A = 2R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

a) Puntos de equilibrio.

Necesitamos la energía potencial.

$$U = \frac{1}{2}k\cdot\Delta l_B^2 + \frac{1}{2}k\cdot\Delta l_A^2.$$

$$= \frac{1}{2}k\left[\left(2R\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{R}{2}\right)^2 + \left(2R\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{R}{2}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow U = kR^2\left(\frac{9}{4} - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Buscamos los ptos. de equilibrio:

$$\frac{dU}{d\theta}(\theta_{eq}) = 0.$$

$$-kR^2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} \qquad \Rightarrow \quad \theta_{eq} = \frac{\pi}{2}$$

(b) Frecuencia de pequeñas oscilaciones.

Primero, verificar que $\theta_{eq} = \frac{\pi}{2}$ es de equilibrio estable.

$\rightarrow$ vemos el signo de la segunda derivada evaluada en θ_{eq}.

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \frac{kR^2}{4}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

Evaluando: $$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_{eq}) = \frac{kR^2}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

$\Rightarrow$ es estable.

La frecuencia de pequeñas oscilaciones es:

$$\omega^2 = \frac{1}{mR^2} \cdot \frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_{eq}) = \frac{\sqrt{2}\,k}{4m}$$

(c) Buscamos la rapidez V_0 que debe tener m en D tq llega al B con $\frac{V_0}{2}$.

Usamos conservación de energía.

$$E_B = \underbrace{\frac{1}{2}k\left(0 - \frac{R}{2}\right)^2}_{\text{resorte B}} + \underbrace{\frac{1}{2}k\left(2R - \frac{R}{2}\right)^2}_{\text{resorte A}} + \frac{1}{2}m\left(\frac{V_0}{2}\right)^2$$

Y en el punto D:

$$E_D = 2 \cdot \frac{1}{2} k \left(\sqrt{2}R - \frac{R}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m V_0^2.$$

Igualando $E_B = E_D$

$$2 \cdot \cancel{\frac{1}{2}} kR^2 \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \cancel{\frac{1}{2}} m V_0^2 = \cancel{\frac{1}{2}} k \cdot \frac{R^2}{4} + \cancel{\frac{1}{2}} kR^2 \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \cancel{\frac{1}{2}} m \cdot \frac{V_0^2}{4}$$

$$2kR^2 \left(2 - \sqrt{2} + \frac{1}{4}\right) + m V_0^2 = \frac{1}{4} kR^2 + kR^2 \left(4 - 2 + \frac{1}{4}\right) + m \frac{V_0^2}{4}$$

$$kR^2 \left(4 - 2\sqrt{2} + \cancel{\frac{1}{2}}\right) = kR^2 \left(2 + \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{1}{4} - 1\right) m V_0^2.$$

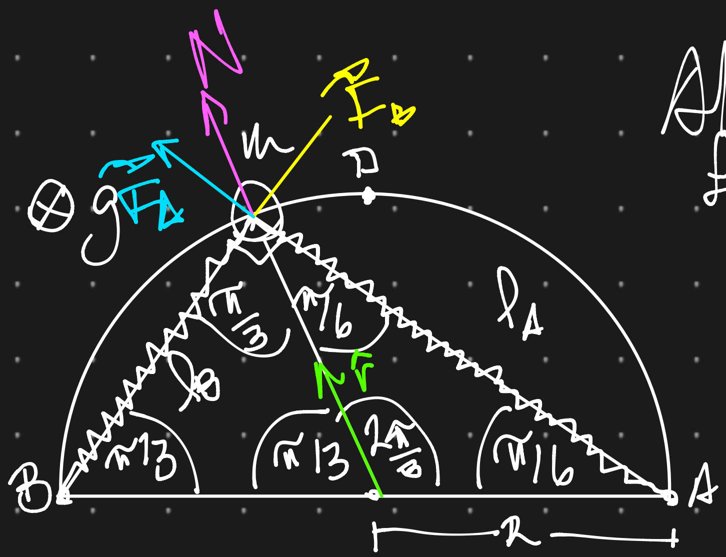
$$\frac{3}{4} m V_0^2 = kR^2 \left(2 - 4 + 2\sqrt{2}\right)$$

$$\frac{3}{4} m V_0^2 = kR^2 \left(2\sqrt{2} - 2\right)$$

$$\Rightarrow V_0^2 = \frac{8kR^2}{3m} \left(\sqrt{2} - 1\right)$$

(2) Finalmente, necesitamos la fuerza normal en $\theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

Conocemos todos los ángulos del sistema en este instante.



Al hacer sumatoria de fuerzas en $\hat{r}$:

$$\sum F = \cancel{\ddot{r}}^{\,0} - r\dot{\theta}^2$$

$$N + F_A \cdot \cos\frac{\pi}{6} + F_B \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -R\cdot\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow N - F_A \cdot \cos\frac{\pi}{6} - F_B \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -R\cdot\dot{\theta}^2$$

$$-R\dot{\theta}^2 = N - \left(-k\cdot\Delta l_A\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-k\cdot\Delta l_B\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= N + \frac{\sqrt{3}}{2}k\left(\left(R - \frac{R}{2}\right) + \left(\sqrt{3}\cdot R - \frac{R}{2}\right)\right)$$

es un triángulo equilátero de lado R.

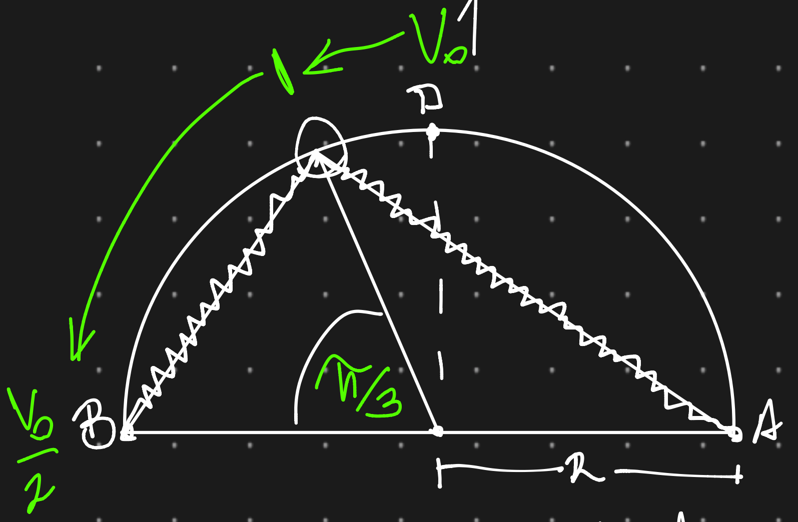
sale de Pitágoras:

$$= N + \frac{\sqrt{3}}{2}kR\left(\cancel{\frac{1}{2}} + \sqrt{3} - \cancel{\frac{1}{2}}\right)$$

$$-R\cdot\dot{\theta}^2 = N + \frac{3}{2}kR$$

$$N = -R\left(\frac{3}{2}k + \dot{\theta}^2\right) \rightarrow \text{falta } \dot{\theta}^2$$

Notamos que:



$$\theta = \frac{\pi}{3} = \left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}$$

$\frac{\pi}{2}$ es todo el camino recorrido.

en $\theta = \frac{\pi}{3}$, había completado $\frac{1}{3}$ del camino.

$\Leftrightarrow$ había perdido $\frac{1}{3}$ de la rapidez total perdida.

$\Rightarrow$ la rapidez en $\theta = 60°$ es

$$V^* = \left(V_0 - \frac{V_0}{2}\right)\cdot\frac{2}{3} = \frac{V_0}{3}.$$

La rapidez en polares es: $V = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \cdot \dot{\theta}^2}$

En este caso: $V^* = R \cdot \dot{\theta}$

$$\frac{V_0}{3} = R\cdot\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{V_0}{3R}.$$

Entonces: $N = -R\left(\frac{3}{2}k + \dot{\theta}^2\right)$

$$N = -R\left(\frac{3}{2}k + \frac{v_0^2}{9R^2}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}kR - \frac{8kR}{24m}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$N = -kR\left(\frac{3}{2} + \frac{8}{24m}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$$