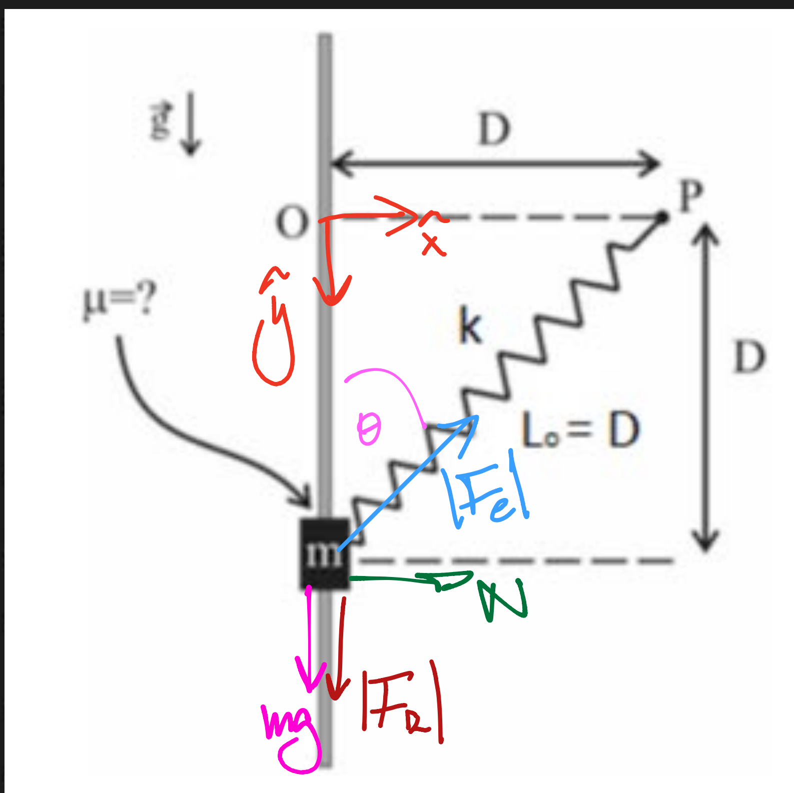
Solución Tarea #3:

P.1. Una argolla de masa **m** está inserta en una barra vertical y ligada a ella mediante un resorte ideal de constante elástica **k** y largo natural L_o = D a un punto fijo P ubicado a una distancia **D** de la barra. Existe roce cinético entre la argolla y la barra. Liberada la argolla desde el reposo desde una altura D bajo el nivel de P, se observa que la argolla asciende y se detiene justo en el punto O en que el resorte está horizontal (lo que pasa después de esta primera detención no es relevante al problema). Determine:

Una vez que entendemos el enunciado dibujamos las fuerzas: elástica, roce, peso y normal.



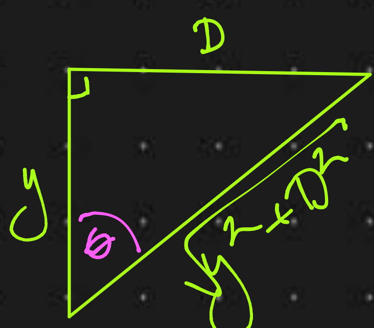
ⓐ Nos piden el trabajo realizado por cada fuerza.

Primero que todo, veamos cómo es cada una.

① Peso $= -mg\,\hat{y}$

② Elástica: $F_e = -k\cdot\left(L_o - \underbrace{\sqrt{y^2+D^2}}\right).$

este término sale del triángulo rectángulo.



$$F_e = -k\left(\sqrt{y^2+D^2} - D\right)$$

③ Roce: $F_R = -\mu \cdot N$.
④ Normal: N.
} nos falta conocer la fuerza normal.

$\Rightarrow$ Para esto, hacemos sumatoria de fuerzas:

$\hat{y}\rfloor \quad m\ddot{y} = +mg + |F_R| + |F_e| \cos\theta$.

lo definimos con respecto a la vertical.

$$m\ddot{y} = -mg - \mu N - K\left(\sqrt{y^2+D^2} - D\right) \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2+D^2}}$$

$\hat{x}\rfloor \quad m\ddot{x} = 0 = N - |F_e| \cdot \operatorname{sen}\theta$.

$$N = K\left(\sqrt{y^2+D^2} - D\right) \cdot \frac{D}{\sqrt{y^2+D^2}}$$

$$\Rightarrow N = \left(1 - \frac{D}{\sqrt{y^2+D^2}}\right) DK.$$

Ya tenemos la normal, y con esta también la de roce.

Ahora, calculemos los trabajos.

El trabajo se calcula como:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = |F| \cdot d \cdot \cos\theta$$

$$= \int_{r_1}^{\vec{r_2}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

① Peso:

$$W_g = \int_D^0 mg\, dy = mg(0 - D) = -mgD$$

② Normal: $W_N = N\,\hat{x} \cdot D\hat{y} = 0.$

Esta fuerza es perpendicular al desplazamiento.

$\Rightarrow$ no ejerce trabajo.

③ Roce: $W_R = \int_D^0 \vec{F}_R \cdot dy\,\hat{y}$

$$W_R = \int_D^0 +\mu N\, dy = \mu KD \int_D^0 \frac{D}{\sqrt{y^2+D^2}} - 1 \; dy$$

$$W_R = \mu KD \left[D \ln\left(y + \sqrt{y^2+D^2}\right) - y \right]_D^0$$

$$W_R = \mu K D\left[D\ln(D) - 0 - D\cdot\ln\left(D + D\sqrt{2}\right) + D\right]$$

$$= \mu K D\left[D\ln(\cancel{D}) - D\ln(\cancel{D}) - D\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + D\right]$$

$$= \mu K D^2\left[1 - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$$

4 Elástica: $W_e = \int_D^0 \vec{F}_e \cdot dy\hat{y}$

$$W_e = \int_D^0 -|F_e|\cos\theta \, dy$$

$$= \int_D^0 -K\left(\sqrt{y^2+D^2} - D\right)\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+D^2}}\,dy$$

$$= +KD\int_D^0 \frac{y}{\sqrt{y^2+D^2}}\,dy - K\int_D^0 y\,dy$$

Hacemos un cambio de variable:

$$u = y^2+D^2 \Rightarrow du = 2y\,dy \Rightarrow dy = \frac{du}{2y}$$

$$= +K\cdot D\int_{2D^2}^{D^2} \frac{\cancel{y}}{\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{2\cancel{y}} - K\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_D^0$$

$$= +KD\cdot\left[\sqrt{u}\right]_{2D^2}^{D^2} - \frac{K}{2}\cdot\left(-D^2\right)$$

$$= +kD\cdot D\left(1-\sqrt{2}\right)+\frac{k}{2}D^2.$$

$$= +kD^2\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) = +kD^2\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right) //$$

NOTA: dependiendo de cómo se definan el eje de coordenadas y cómo dibujen las fuerzas, los signos pueden cambiar, pero el desarrollo debe ser consistente!

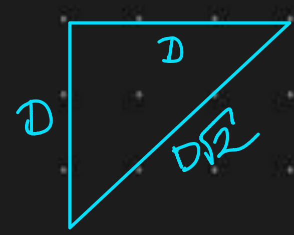
(b) Necesitamos una expresión para el coef. de roce cinético μ.

Una forma de hacerlo es con conservación de energía.

Inicialmente: $E_i = E_{\text{cinética}} - E_{\text{grav}} - E_{\text{elástica}}.$

$$E_i = \cancel{\frac{1}{2}m0^2}^{\,0} - mgD + \frac{1}{2}k\cdot\underbrace{\left(D - D\cdot\sqrt{2}\right)}^{2}$$

parte en reposo



$$E_i = \frac{1}{2}kD^2\left(1-\sqrt{2}\right)^2 - mgD.$$

Finalmente: $E_f = \frac{1}{2}m0^2 - mg0 + \frac{1}{2}k(D-D)^2$

$$E_f = 0.$$

Además, la fuerza no conservativa que produjo una pérdida de energía es la de roce.

$$\Rightarrow E_f = E_i - W_R$$

$$0 = \frac{1}{2}kD^2(1-\sqrt{2})^2 - mgD - \mu kD^2\left[1 - \ln(1+\sqrt{2})\right]$$

De aquí podemos despejar μ.

$$\mu kD^{\cancel{2}}(1-\ln(1+\sqrt{2})) = \frac{1}{2}kD^{\cancel{2}}(1-\sqrt{2})^2 - mg\cancel{D}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{1-\ln(1+\sqrt{2})}\left(\frac{(1-\sqrt{2})^2}{2} - \frac{mg}{kD}\right)$$

Si $kD = 20\,mg$:

$$\mu = \frac{1}{1-\ln(1+\sqrt{2})}\left(\frac{(1-\sqrt{2})^2}{2} - \frac{mg}{20mg}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\ln(1+\sqrt{2})}\left(\frac{(1-\sqrt{2})^2}{2} - \frac{1}{20}\right)$$

La calculadora nos dice que:

$$\mu \approx 0.3$$