

The Beatles - Penny Lane.

Resumen Sistemas de Partículas:

$$\rightarrow \vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \cdot \vec{r}_i$$

cuánto "pondera" cada masa.

$$\rightarrow \text{Fuerzas Internas: } \sum \vec{F}_{int} = 0$$

(se cancelan entre sí).

$$\rightarrow \text{Fuerzas Externas: } \sum \vec{F}_{ext} = \vec{P}_{cm}$$

Si no hay fuerzas ext., $\vec{P}_{cm} = \text{constante}$:

$$\rightarrow \text{Momentum Angular: } \vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i$$

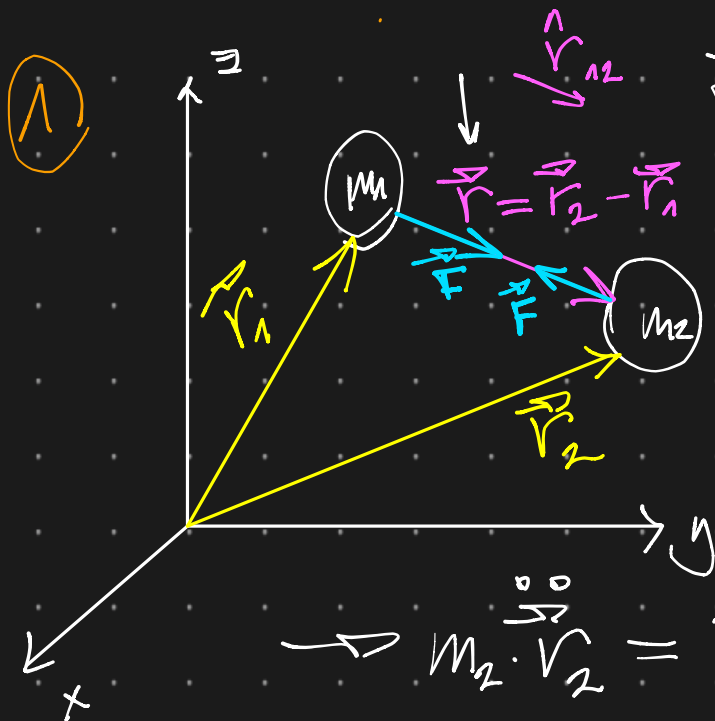
$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

P1

P1) Caso No Rígido

Suponga que entre dos partículas de masas m_1 y m_2 respectivamente hay una interacción conservativa mediada por una fuerza $\vec{F} = F(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$, donde $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son los vectores posición de las partículas, y F una constante. Suponga que **no hay fuerzas externas**.

1. Escriba las ecuaciones de movimiento del sistema. $\rightarrow$ de cada partícula.
2. Muestre que se pueden reducir a la dinámica de una sola partícula con masa efectiva. Para ello le será conveniente representar las posiciones como un vector que apunta a la masa más otro desde el centro de masa a la partícula en cuestión.



$$\vec{F} = F(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\rightarrow m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = F(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\textcircled{1} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = F(r_2 - r_1) \hat{r}_{12}$$

$$\rightarrow m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = F(-r_2 + r_1) \hat{r}_{12}$$

$$\textcircled{2} m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = F(r_1 - r_2) \hat{r}_{12}$$

2 Queremos escribir $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ en función de $\vec{r}$ y $\vec{R}_{cm}$

$$\rightarrow \vec{R}_{cm} = \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Rightarrow \vec{r}_2 = \vec{r} + \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}$$

1 Para despejar $\vec{r}_1$: reemplazamos

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$$

$$= \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot (m_1 \vec{r}_1 + m_2 (\vec{r} + \vec{r}_1))$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) \vec{R}_{cm} = \vec{r}_1 (m_1 + m_2) + m_2 \vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{cm} - \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2}$$

2) Para despejar $\vec{r}_2$: *reemplazamos*.

$$\begin{aligned} \vec{R}_{cm} &= \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \vec{r}_1 + \vec{r}_2 m_2) \\ &= \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 (\vec{r}_2 - \vec{r}) + \vec{r}_2 m_2) \end{aligned}$$

$$(m_1 + m_2) \vec{R}_{cm} = \vec{r}_2 (m_1 + m_2) - m_1 \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_{cm} + \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2}$$

Tenemos que reemplazar $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ en las ecs. de mov.

Las restamos antes para unificarlas:

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \quad m_1 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2 = 2F(r_2 - r_1) \hat{r}_{12} \quad \textcircled{\otimes}$$

$$\rightarrow \vec{r}_1 = \vec{R}_{cm} - \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2} \quad / \quad \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{cm} - \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2}$$

$$\rightarrow \vec{r}_2 = \vec{r}_{cm} + \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2}$$

No hay fuerzas externas

$$\Rightarrow \vec{p}_{cm} = a \cdot \vec{V}_{cm} = a \vec{p}_{cm} = \text{cte.}$$

$$\vec{p}_{cm} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 = -\frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2} \quad \text{y} \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2}$$

Reemplazamos en 

$$m_1 \cdot \left(\frac{-m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2} \right) - m_2 \cdot \left(\frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2} \right)$$

$$= 2F \left((r + r_1) - (r_2 - r) \right) \hat{r}_{12}$$

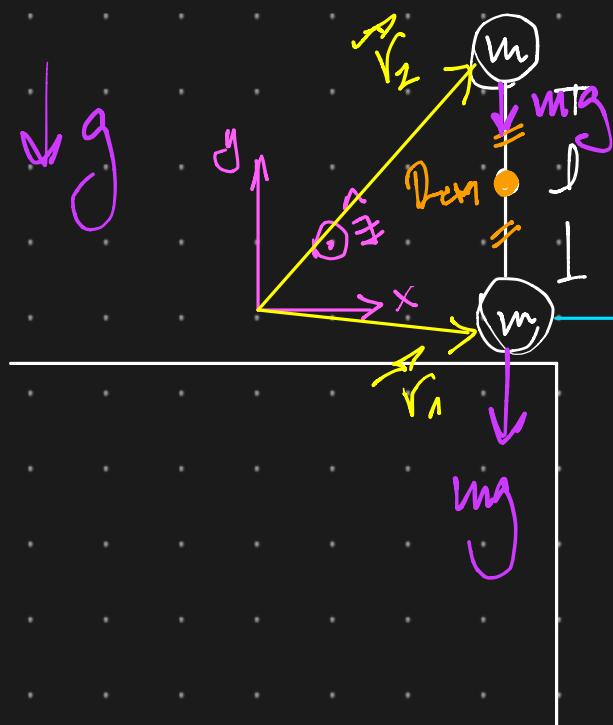
$$- \cancel{2} \frac{m_1 m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2} = \cancel{2} F r \hat{r}_{12}$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} = -F r \hat{r}_{12}$$

P2) Caso Rígido

Considere que la distancia entre dos partículas idénticas es fija, i.e. están unidas por una barra rígida. La barra está dispuesta de forma vertical, como en la figura. Inicialmente la partícula de más abajo tiene una velocidad V_0 perpendicular al eje que las une.

Encuentre el momento lineal y angular del centro de masas.



$$at=0$$

Buscamos $\vec{L}_{cm}$.

$$\vec{L}_{cm} = \frac{1}{2m} \cdot (m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2)$$

$$\vec{L}_{cm} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$

→ Mom. Lineal: $\vec{P}_{cm}$.

Sabemos que $\sum \vec{F}_{ext} = \dot{\vec{P}}_{cm}$.

⇒ Sacamos las eqs. de movimiento.

$$\left[\hat{x} \right] \int_{t=0}^t \dot{x}_{cm} dt = 0 \quad \bigg/ \quad \int dt$$

$$\int_{t=0}^t \dot{x}_{cm} dt = \dot{x}_{cm}(t) - \underbrace{\dot{x}_{cm}(0)}_{V_0} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{cm} = V_0 \text{ cte.}$$

$$\hat{y} | 2m \ddot{y}_{cm} = -2mg \Rightarrow \ddot{y}_{cm} = -g / \int dt$$

$$\int_0^t \ddot{y}_{cm} dt = -g \int_0^t dt$$

$$\dot{y}_{cm}(t) - \dot{y}_{cm}(0) = -gt \Rightarrow \dot{y}_{cm} = -gt.$$

$$\vec{V}_{cm} = \vec{P}_{cm} = V_0 \hat{x} - gt \hat{y}$$

$$\vec{P}_{cm} = 2m \cdot \vec{V}_{cm} = 2m \cdot (V_0 \hat{x} - gt \hat{y}).$$

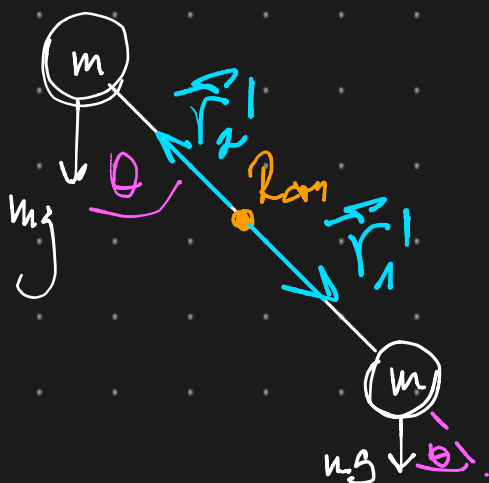
$$\boxed{\vec{P}_{cm} = 2m V_0 \hat{x} - 2mgt \hat{y}}$$

Ahora, calculamos el momentum angular.

$$\vec{L}_{cm} = \sum_{i=1}^2 \vec{r}_i' \times \vec{p}_i' = \sum m_i \vec{r}_i' \times \vec{V}_i'$$

Para un $t > 0$:

→ nos definiremos los vectores $\vec{r}_1'$ y $\vec{r}_2'$



$$\text{Cumplen que: } |\vec{r}_1'| = |\vec{r}_2'| = \frac{l}{2}$$

$$\vec{r}_1' = -\vec{r}_2'$$

$\Rightarrow$ Aparece una velocidad angular $\hat{\omega}$.

$$\vec{\omega} = \dot{\Theta} \hat{z} \quad \text{con} \quad \dot{\Theta} = \frac{V_0}{l} \quad \text{en } t=0, \quad \text{y es constante}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_i' = \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$$

$$\textcircled{1} \quad \vec{v}_1' = \dot{\Theta} \hat{z} \times \vec{r}_1' \quad \text{y} \quad \textcircled{2} \quad \vec{v}_2' = \dot{\Theta} \hat{z} \times \vec{r}_2'$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{L}_{cm} &= m \cdot \vec{r}_1' \times \vec{v}_1' + m \cdot \vec{r}_2' \times \vec{v}_2' \\ &= m \cdot \vec{r}_1' \times (\dot{\Theta} \hat{z} \times \vec{r}_1') + m \vec{r}_2' \times (\dot{\Theta} \hat{z} \times \vec{r}_2') \end{aligned}$$

$$\text{Pero } \vec{r}_2' = -\vec{r}_1'$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{L}_{cm} &= m \vec{r}_1' \times (\dot{\Theta} \hat{z} \times \vec{r}_1') + m (-\vec{r}_1') \times (\dot{\Theta} \hat{z} \times (-\vec{r}_1')) \\ &= 2m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \cdot \dot{\Theta} \hat{z} = m \frac{l^2}{2} \cdot \frac{V_0}{l} \hat{z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_{cm} = \frac{1}{2} m l V_0 \hat{z}}$$

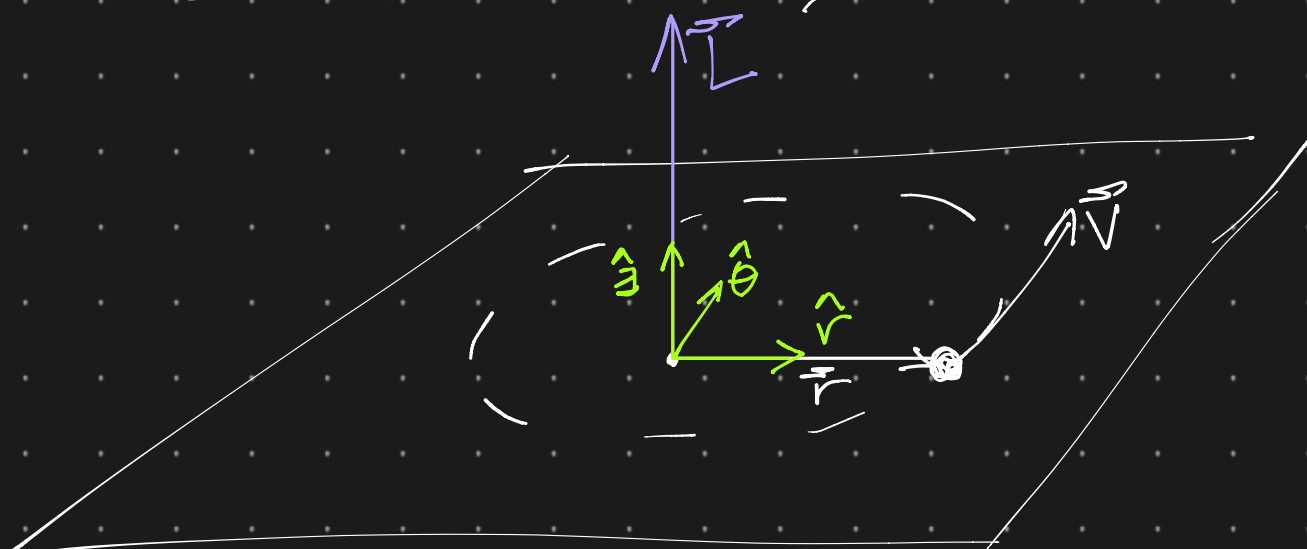
Para el control.

2º PASO:

Fuerza central: $\vec{F} = f(r) \hat{r}$

Es conservativa $\checkmark \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U =$

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{array} \right)$$



$$\text{porque: } \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (f(r) \cdot \hat{r}) = 0$$

$\Rightarrow$ el momento $\propto$ plano.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte.}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m \cdot \rho \cdot (\rho \dot{\theta}) \hat{z}$$

$$\vec{L} = m \rho^2 \dot{\theta} \hat{z} = L_0 \hat{z}$$

$$h = \frac{L_0}{m} = \rho^2 \dot{\theta}$$

Ec. de movimiento en $\hat{\rho}$:

$$m \cdot (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) = F(\rho)$$

$$\text{Energía: } \left[\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \left\{ \frac{m h^2}{2 \rho^2} \right\} + U(\rho) \right] = \text{cte}$$

energía cinética
tradicional.

$U_{\text{eff}}(\rho)$.

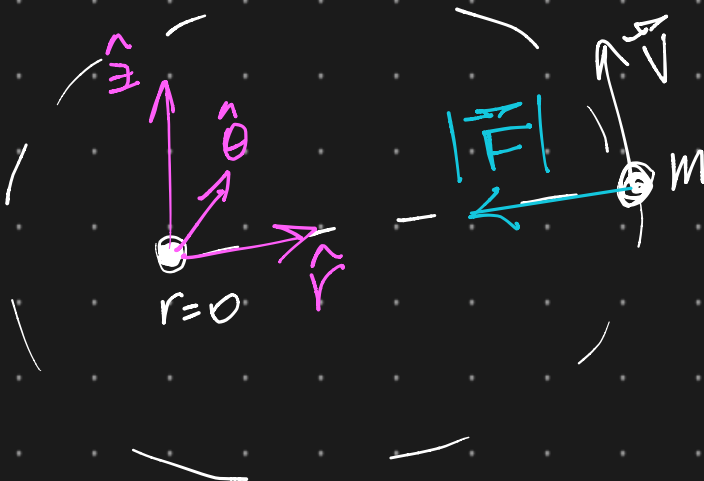
$$\frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\theta})^2 \right) + U(\rho) = \text{cte}.$$

P3) Para repasar

Considere una partícula P de masa m que se mueve en un campo de fuerza de atracción $\vec{F} = -c\hat{r}$, donde c es una constante positiva.

- Determine el potencial efectivo. Gráfiquelo en función de r .
- Demuestre que P no puede escapar de este campo de atracción.

$\vec{F} = -c\hat{r}$
↓
Esa. central.



②

$$\text{Energía: } E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{m h^2}{2 r^2} + U(r)$$

$$\vec{F} = -c\hat{r} = -\nabla U / \int dr$$

$$c \cdot \int_{r_0}^r dr = U(r)$$

$$c(r - r_0) = U(r)$$

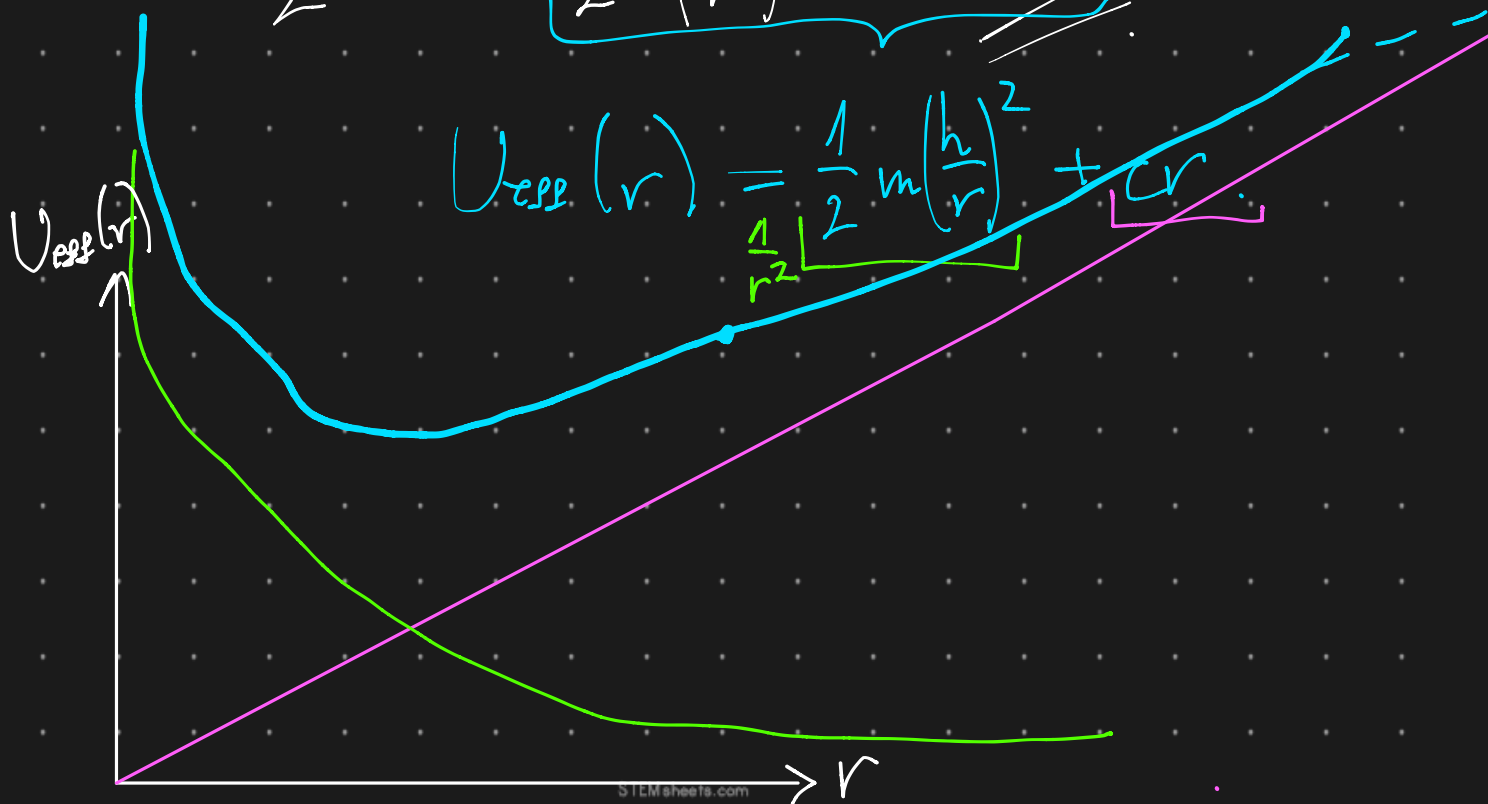
Puedo escoger que $U(r=0) = 0$
 $\Rightarrow r_0 = 0.$

$$\Rightarrow U(r) = c \cdot r$$

Reemplazamos en la energía:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{h}{r} \right)^2 + U(r)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m \left(\frac{h}{r} \right)^2 + cr}_{\text{}}.$$



b) escapa?

$$\left\{ \begin{array}{l} \otimes \\ F_{\text{esp}} = -\nabla U_{\text{eff}} \end{array} \right.$$

Hay que ver qué pasa
en $r \rightarrow \infty$

$$\text{Si } r \rightarrow \infty, \quad U_{\text{eff}} \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ NO escapa.

Ejemplo: $U_g = -\frac{G m_1 m_2}{r}$

$$r \rightarrow \infty$$

$$U_g \rightarrow 0$$

} Si escaparía
si el potencial
fuerá gravitatorio.

c) Suponga que la partícula se encuentra en la órbita circular de la parte b) y que, como resultado de un impulso radial en dirección opuesta al centro de atracción, la partícula queda en una órbita tal que su distancia máxima al centro de atracción es $2r_0$, donde r_0 es un punto de equilibrio estable. Determine cuánto aumenta la energía mecánica total de la partícula como resultado de este impulso.

Tomamos que la energía era:

$$E_0 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{h}{r} \right)^2 + Cr$$

$\Rightarrow$ antes del impulso: $r = r_0$
 $\dot{r} = \dot{r}_0 = 0$ porque la órbita
es circular.

$$\Rightarrow E_n^0 = \frac{1}{2} m \underbrace{\left(\frac{L_0}{m r_0} \right)^2}_{h^2} + \frac{1}{2} m \frac{1}{r_0^2} \cdot \underbrace{\left(\frac{L_0}{m} \right)^2}_{h^2} + C \cdot r_0$$

$$E_n^0 = \frac{L_0^2}{2 m r_0^2} + C r_0 \rightarrow \text{sólo nos falta sacar } L_0.$$

Despejamos L_0 desde la ec. de momento.

$\odot \cancel{m \dot{r}^2} = f(r) + \left(\frac{L_0^2}{m r^3} \right) \rightarrow$ este término sale de integrar el pot. electro.

porque el mov. es circular.

$$0 = -C + \frac{L_0^2}{m r^3} \quad / \quad \text{despejamos } L_0.$$

$$L_0^2 = m C r_0^3 \quad / \quad \text{Reemplazamos en la energía inicial}$$

$$E_n^0 = \frac{m C r_0^3}{2 m r_0^2} + C \cdot r_0 = \frac{3}{2} C \cdot r_0.$$

Ahora buscamos la energía final.

$$\begin{aligned}
 E_f = E(2r_0) &= \frac{1}{2} m \frac{L_0^2}{m^2 (2r_0)^2} + C \cdot (2r_0) \\
 &= \frac{L_0^2}{8 m r_0^2} + 2 C r_0
 \end{aligned}$$

$$= \frac{mcr_0^3}{8mr_0^2} + 2cr_0 = \frac{1}{8} \cdot cr_0 + 2 \cdot cr_0.$$

$$\Rightarrow E_f = \frac{17}{8} cr_0.$$

$$\text{Entonces: } \Delta E = E_f - E_i = cr_0 \left(\frac{17}{8} - \frac{3}{2} \right)$$

$$\Delta E = \frac{5}{8} \cdot cr_0.$$

d) Si se verifica que la partícula se encuentra en una **órbita circular de radio $r = r_0$** , determine el **periodo de pequeñas oscilaciones** que experimenta la distancia entre la partícula y el centro de atracción cuando la partícula sufre una pequeña perturbación radial.

Antes estudiamos que una forma de buscar la frecuencia de pequeñas oscilaciones es armar una ec. de movimiento de un oscilador armónico.

Hay una 2da forma de encontrarla: usando el potencial efectivo, que en este problema es mucho más conveniente.

La freq. de pequeñas oscilaciones ω cumple:

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 U_{\text{eff}}(r_{\text{eq}})}{\partial r^2}.$$

Es decir, es la 2da derivada de U_{eff} evaluada en el punto de equilibrio estable r_{eq} . Las oscilaciones

ocurren c/r a r_{eq} .

... qué tenemos en este caso?

De la parte a): $U_{eff}(r) = \frac{1}{2} m \left(\frac{h}{r} \right)^2 + cr$

Sabemos que el pto de equilibrio estable es r_0 por enunciado.

Derivamos $U_{eff}(r)$:

$$\frac{dU_{eff}(r)}{dr} = \frac{1}{2} m h^2 \cdot \left(-\frac{2}{r^3} \right) + c.$$

$$= c - m h^2 \cdot \frac{1}{r^3} \quad / \quad \text{derivamos de nuevo.}$$

$$\frac{d^2 U_{eff}(r)}{dr^2} = 0 - m h^2 \cdot \left(\frac{-3}{r^4} \right) = \frac{3 m h^2}{r^4}.$$

$$\text{Sabemos que } h = \frac{L_0}{m} = \frac{\sqrt{m c r_0^3}}{m} = \sqrt{\frac{c r_0^3}{m}}$$

$$\frac{d^2 U_{eff}(r)}{dr^2} = 3 \cdot \sqrt{m c r_0^3} \cdot \frac{1}{r^4}.$$

Evaluamos en $r_{eq} = r_0$ y partimos por m :

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \cdot \left(3 \sqrt{m c r_0^3} \cdot \frac{1}{r_0^4} \right) = 3 \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_0^5}}$$

Llegamos a la respuesta $\checkmark$.

$$\omega^2 = 3 \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_0^3}}$$