Pauta Auxiliar 14

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Nicolas Guerra, Mauricio Rojas y Edgardo Rosas

juju

P1. El primer problema es un problema muy tipico de potenciales y la idea es seguir reforzando los conceptos. Tenemos dos fuerzas presentes, el peso ($-mg\hat{r}$) y tambien la fuerza de repulsión, $\frac{k}{r^2}\hat{r}$.

a) Primero nos piden la funcion potencial asociada a la fuerza neta que actua sobre el anillo. Para poder responder esta pregunta, tenemos que saber cual es la fuerza neta, o mejor dicho, cual es su definición. La fuerza neta es la suma de todas las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo. En este caso tendremos:

$$F_{neta} = -mg\hat{r} + \frac{k}{r^2}\hat{r}$$

Nos piden el potencial asociado a esta fuerza, recordamos que debe cumplir la relacion $-\nabla V = F$

$$-\nabla V = F_{neta}$$
$$-\nabla V = -mg\,\hat{r} + \frac{k}{r^2}\hat{r}$$
$$\frac{\partial V}{\partial r} = mg - \frac{k}{r^2}$$

Donde en el último paso aprovechamos que la fuerza solo esta en la componente radial y asi el gradiente de V solo tiene componente en $\hat{r}$.

Ahora queremos integrar la ecuacion en r para obtener la expresión del potencial.

$$\int_0^r dV = \int_0^r dr(mg - \frac{k}{r^2})$$
$$V(r) - V(0) = mg\Big|_0^r + \frac{k}{r}\Big|_0^r$$

Notamos que cuando evaluemos el segundo termino de la derecha en 0, tendremos un problema, porque la funcion no es acotada en 0, asi que diremos que el potencial es no acotado en 0, de manera que $V(0)$, es no acoada y se cancela con el termino que diverge. Obteniendo así:

$$V(r) = mgr + \frac{k}{r}$$

El grafico lo haré el fin de semana, igual lo hice en clases jiji.

b) Ahora queremos determinar los puntos de equilibrio y el periodo de pequeñas oscilaciones. Recordando clases anteriores, podemos encontrar puntos de equilibrio de 2 formas, una haciendo que la fuerza neta sea 0, o derivando el potencial e igualandolo a 0, que es equivalente porque acabamos de calcular el potencial integrando la fuerza. Entonces:

$$\begin{aligned}
F_{neta} &= 0 \\
-mg + \frac{k}{r^{*2}} &= 0 \\
\frac{k}{mg} &= r^{*2} \\
\sqrt{\frac{k}{mg}} &= r^{*}
\end{aligned}$$

Donde tomamos el valor positivo como solución porque la negativa no tiene sentido jeje. Ahora queremos el periodo de pequeñas oscilaciones, para obtenerlo calculamos la segunda derivada del potencial y lo evaluamos en el punto de equilibrio.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r^*} &= \frac{2k}{r^{*3}} \\
&= \frac{2k}{\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}\right)^3}
\end{aligned}$$

Ahora para el periodo de pequeas oscilaciones, usamos la formula

$$
\begin{aligned}
w_{po} &= \sqrt{\frac{\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r^*}}{m}} \\
&= \sqrt{\frac{2k}{m\cdot\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}\right)^3}}
\end{aligned}
$$

c) Ahora queremos calcular la altura r_o, sobre el centro de la esfera para que llegue con velocidad nula a la superficie de la esfera. Para resolver este problema como la energía se conserva haremos $E_i = E_f$. Inicialmente no tiene energía cinética y finalmente tampoco, de manera que la condicion se transforma en:

$$
\begin{aligned}
E_i &= E_f \\
V(r_o) &= V(R) \\
mgr_o + \frac{k}{r_o} &= mgR + \frac{k}{R} \\
mgr_o^2 - r_o\left(mgR + \frac{k}{R}\right) + k = 0
\end{aligned}
$$

Donde se puede resolver la ecuación cuadrática y tomamos la solucion con signo +, puesto que la con el signo menos es $r = r_o$.

$$
\begin{aligned}
mg(r_o - R) &= (r_o - R)\frac{k}{r_oR} \\
0 &= (r_o - R)\left(\frac{k}{r_oR} - mg\right) \\
\implies mg &= \frac{k}{r_oR} \\
r_o &= \frac{k}{mgR}
\end{aligned}
$$

Y como tenemos $\frac{k}{R^2} > mg$, entonces se cumple que $\frac{k}{mgR} > R$ La solución tiene sentido.

P2. Ahora para este problema trabajaremos con la fuerza gravitacional.

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Donde G es la constante de gravitacion universal m y M son las masas de los cuerpos y r la distancia entre ellas. Tenemos que inicialmente la capsula orbita con una orbita circular con velocidad v_o. Esta condicion inicial la utilizaremos para obtener la masa del cuerpo no específicado, puesto que no la conocemos. Si se mueve en un MCU, se cumple que $v_o = R_o\dot{\theta}$, ahora si tomamos la ecuación de movimiento en $\hat{r}$. Tendremos que

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GMm}{r^2}$$
$$R_o\frac{v_o^2}{R_o^2} = \frac{GM}{R_o^2}$$
$$v_o^2 R_o = GM$$

Ahora que despejamos esa incognita, procedemos a resolver la pregunta jeje.

a) Para entender bien que significa esto, necesitamos entender como distintos Valores para la energia nos entregan distintos comportamientos. (En el aux dibuje la curva del potencial para apoyarme.) Cuando la energia es mayor que 0, tendremos que la particula tiene suficiente como para escapar, cuando la Energia es menor que 0, orbita y cuando es igual a 0, es el limite para que escape. Nosotros queremos ese limite así que diremos que la Energia es 0.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r)$$
$$0 = \frac{1}{2}m\alpha^2 v_o^2 - \frac{GMm}{R_o}$$
$$\alpha^2 v_o^2 = \frac{2v_o^2 R_o}{R_o}$$
$$\alpha = \sqrt{2}$$

b) Ahora vamos a la pregunta intensa,queremos mostrar que la distancia maima que alcanza la capsula cumple la relación.

$$\frac{R_{max}}{R_o} = \frac{\alpha^2}{2-\alpha^2}$$

Para llegar a una relación de ese estilo, necesitamos meternos a la ecuación de Binet. La ecuación de Binet surge como una fomra de hacer mas simple de resolver la ecuacion de movimiento para r, haciendo el cambio de variable:

$$r = \frac{1}{\xi}$$

Primero veamos la ecuación de movimiento para ver cuales son los terminos que tenemos que cambiar:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r)$$

La ecuación de movimiento en θ nos dice :

$$\begin{aligned} r^2\dot{\theta} = \frac{1}{\xi^2}\dot{\theta} &= \alpha R_o v_o \\ \dot{\theta} &= \xi^2 \alpha R_o v_o \end{aligned}$$

Ahora buscaremos la expresión para $\dot{r}$.

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\xi}\frac{d\xi}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\dot{\theta} = -\alpha R_o v_o \frac{d\xi}{d\theta}$$

Ahora que tenemos, $\dot{r}$, calculemos la segunda derivada!

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\dot{\theta} = -\alpha R_o v_o \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2}\dot{\theta} = -\alpha^2 R_o^2 v_o^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2}\xi^2$$

La nueva ecuación de movimiento será entonces:

$$\begin{aligned} m(-\alpha^2 R_o^2 v_o^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2}\xi^2 - \xi^3 \alpha^2 R_o^2 v_o^2) &= f(\xi) \\ -\alpha^2 R_o^2 v_o^2 \xi^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \xi\right) &= f(\xi) \end{aligned}$$

Ahora si escribimos la fuerza gravitacional en funcion de ξ. Tendremos que :

$$\begin{aligned} -\alpha^2 R_o^2 v_o^2 \xi^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \xi\right) &= -v_o^2 R_o m \xi^2 \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \xi &= \frac{1}{R_o \alpha^2} \end{aligned}$$

Esto tiene como solución un oscilador armonico desplazado, como es un auxiliar matraquero me saltare esos pasos y escribire la solución:

$$\xi(\theta) = \frac{1}{R_o \alpha^2} + A\cos(\theta - \delta)$$

Donde en vez de escribir un seno y un coseno, pusimos una fase δ y A es la amplitud de oscilacion, que tenemos que encontrar usando condiciones iniciales. Deshaciendo el cambio de variable obtenemos:

$$r(\theta) = \frac{1}{\dfrac{1}{R_o\alpha^2} + Acos(\theta - \delta)}$$

Ahora si imponemos $r(0) = R_o$, que es la condicion inicial, (tomamos la fase delta como 0 pues lo unico que hace es definir la orientacion de la orbita.) Entonces:

$$r(0) = R_o = \frac{1}{\dfrac{1}{R_o\alpha^2} + A\cos(0)}$$

$$\frac{1}{R_o\alpha^2} + A = \frac{1}{R_o}$$

$$A = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 R_o}$$

Hay foma de calcular la excentricidad de la curva si escribimos el r como:

$$r(\theta) = r_o \, \frac{1 + e}{1 + e\cos(\theta)}$$

Si toman la expresión de arriba y la trabajan para convertirla en la ultima escrita obtendrán.

$$e = \alpha^2 - 1$$

$$r_o = \frac{\alpha^2 R_o}{1 + e} = R_o$$

Ahora volviendo a nuestro problema, debido a que elegimos la orientacion horizontal, el R_{max} sera cuando $\theta = \pi$.

$$r(\pi) = R_{max} = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha^2 R_o} - \dfrac{(\alpha^2 - 1)}{\alpha^2 R_o}}$$

$$R_{max} = \frac{R_o\alpha^2}{2 - \alpha^2}$$

Con lo que termina el segundo problema y este auxiliar c: