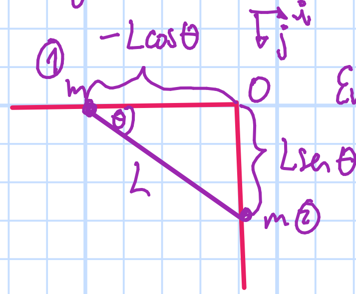
P1) Dos argollas puntuales de masa m deslizan sin roce, una inserta en una barra vertical y la otra en una barra horizontal, como muestra la figura. Las argollas estan unidas entre si por una cuerda inextensible de largo L. Suponiendo que el sist se libera desde el reposo con la cuerda estirada y horizontal. $(\theta(t=0)=0)$

a) Queremos la distancia de cada argolla de O en función de θ, la rapidez y la aceleración



En un instante arbitrario

Así $\vec{r}_1 = -L\cos\theta\ \hat{\imath}$

$\vec{r}_2 = L\sin\theta\ \hat{\jmath}$

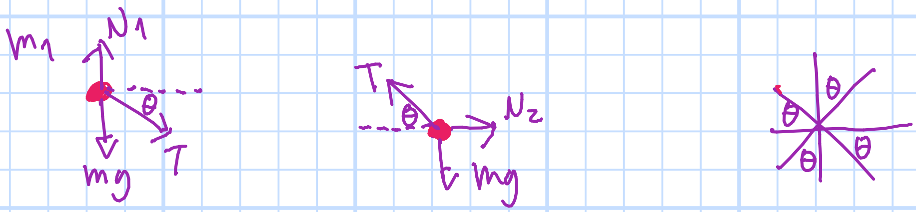
Sus velocidades $\vec{V}_1 = \dot{\vec{r}}_1 = L\sin\theta\ \dot{\theta} \Rightarrow \vec{a}_1 = \dot{\vec{V}}_1 = L\cos\theta\ \dot{\theta}^2 + L\sin\theta\ \ddot{\theta} = \ddot{x}_1$

$\vec{V}_2 = \dot{\vec{r}}_2 = L\cos\theta\ \dot{\theta} \Rightarrow \vec{a}_2 = \dot{\vec{V}}_2 = -L\sin\theta\ \dot{\theta}^2 + L\cos\theta\ \ddot{\theta} = \ddot{y}_2$

Hasta aca son 15 puntos

b) Combine las ecuaciones de mov. de las argollas para encontrar una ec diferencial para $\ddot{\theta}$ en función de θ

Para encontrar las ec de mov, haremos DCL's



Así obtenemos las ec

$m_1)\quad -N_1 + mg + T\sin\theta = m\cancel{\ddot{y}_1}^{\,0} \quad (1)$

$T\cos\theta = m\ddot{x}_1$

$T\cos\theta = m\cdot(L\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + L\sin\theta\,\ddot{\theta}) \quad (2)$

$m_2)\quad -T\cos\theta + N_2 = m\cancel{\ddot{x}_2}^{\,0} \quad (3)$

$N_2 - T\sin\theta + mg = m\ddot{y}_2$

$-T\sin\theta + mg = m(-L\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + L\cos\theta\,\ddot{\theta}) \quad (4)$

Trucazo: $(2)\cdot\sin\theta + (3)\cdot\cos\theta$

$\cancel{m}g\cos\theta = \cancel{m}L\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{L}\cos\theta$ // Hasta acá son 15 puntos +

c) Determine la tensión de la cuerda en función de θ.

Podemos despejarla de (2) o (4) pero nos falta $\dot{\theta}$,

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{2}\cos\theta \Rightarrow \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{2}\cos\theta \quad / \int d\theta$$

$$\int_{\dot{\theta}=0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \frac{g}{2}\int_{\theta=0}^{\theta} \cos\theta\, d\theta \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{2}(\operatorname{sen}\theta)$$

Se suelta $\rightarrow \dot{\theta}=0$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{2}\operatorname{sen}(\theta)$$

Ahora usando (2)

$$T\cancel{\cos\theta} = mL\left(\cancel{\cos\theta}\cdot\frac{2g}{2}\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cdot\frac{g}{2}\cancel{\cos\theta}\right)$$

$\theta \in [0, \pi/2)$
$\cos(\theta) \neq 0$

$$T = 3mg\operatorname{sen}(\theta) \;//$$

Hasta acá son 15 puntos +

Si la cuerda se corta cuando $T=mg$, en ese instante $\operatorname{sen}\theta^* = 1/3 \Rightarrow \theta^* = \arcsen(1/3)$

$\theta^* = 0{,}33 \text{ rad}$

Para ese momento, si $\operatorname{sen}\theta^* = 1/3$ $\quad \cos\theta^* = 2\sqrt{2}/3$

La rapidez de la argolla superior es

$$\dot{\vec{r}}_1 = L\operatorname{sen}\theta\cdot\dot{\theta}\,\hat{\imath} = L\cdot\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{2g}{2}\operatorname{sen}(\theta^*)}\,\hat{\imath} = \frac{\sqrt{2gL}}{3\sqrt{3}}\,\hat{\imath}$$

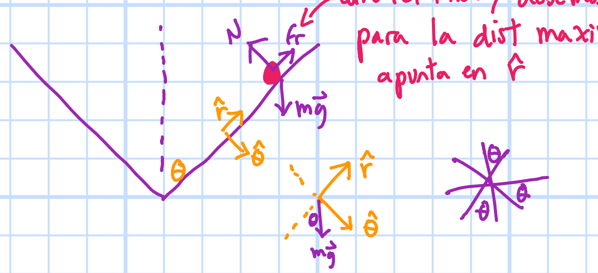
Como luego no hay fuerzas en ese eje, se mantendrá con esa velocidad

15 puntos hasta acá.

P2) Una partícula de masa m se encuentra en la superficie interior de un cono hueco de semiángulo 45° c/r al eje vertical. El cual gira en torno a su eje con velocidad angular cte Ω_0

Entre la superficie y la partícula existe un coeficiente de roce estático $\mu = 0{,}5$. Se pide determinar el rango de distancias entre la partícula y el vértice O en las que ella permanece en reposo c/r al cono.

Primero en esféricas, hagamos el DCL



$\vec{N} = -N\hat{\theta}$ $\quad \vec{f_r} = f_r\hat{r}$

$m\vec{g} = mg(-\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta})$

$m\vec{a} = \sum \vec{F}$ / De aquí obtendremos 3 ecuaciones

$ma_{\hat{r}} = \sum F_{\hat{r}}$ $\quad ma_{\hat{\phi}} = \sum F_{\hat{\phi}}$ $\quad ma_{\hat{\theta}} = \sum F_{\hat{\theta}}$

No se mueve en dal cono

$m(\cancel{\ddot{r}} - r\cancel{\dot{\theta}^2} - r\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2) = -mg\cos\theta + f_r$ (1)

$m(r\sin\theta\cancel{\ddot{\phi}} + 2\cancel{\dot{r}}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\cancel{\dot{\theta}}\dot{\phi}\cos\theta) = 0$ / Si hubieramos puesto roce en $\hat{\phi}$, nos hubiera dado que es 0 pues $a_\phi = 0$

$0 = 0$

$m(r\cancel{\ddot{\theta}} + 2\dot{r}\cancel{\dot{\theta}} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2) = mg\sin\theta - N$

Así, tendremos

$-mr\sin^2(\theta)\cdot\dot{\phi}^2 + mg\cos\theta = f_r$

$N = mg\sin\theta + r\sin\theta\cos\theta\, m\dot{\phi}^2$

Primero asumimos $f_r > 0$, entonces $f_r \leq \mu N$

$\cancel{m}g\cos\theta - \cancel{m}r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 \leq \mu\cdot \cancel{m}g\sin\theta + \cancel{m}r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2\mu$

$g(\cos\theta - \mu\sin\theta) \leq r\dot{\phi}^2[\sin\theta\cos\theta\,\mu + \sin^2\theta]$ /

$\frac{g}{\dot{\phi}^2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \leq r\left[\frac{2}{8} + \frac{2}{4}\right]$

$\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{g}{\dot{\phi}^2} \leq r$ [Dimensionalmente correcto]

Para el otro caso decimos $f_r < 0 \Rightarrow -f_r \leq N\mu$

$f_r \geq -N\mu$

$-mr\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 + mg\cos\theta \geq -\mu[mg\sin\theta + r\sin\theta\cos\theta\, m\dot{\phi}^2]$

$g[\cos\theta + \mu\sin\theta] \geq r\dot{\phi}^2[\sin^2\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta]$

$$\frac{g}{\dot{\phi}^2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \geq r\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}\right]$$

$$\frac{g}{\dot{\phi}^2}\;3\cdot\sqrt{2} \quad \geq r$$

Entonces $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\,\dfrac{g}{\dot{\phi}^2} \leq r \leq 3\sqrt{2}\cdot\dfrac{g}{\dot{\phi}^2}$