

Pauta Auxiliar 4

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Nicolas Guerra, Mauricio Rojas y Edgardo Rosas

30 de marzo de 2021

- P1. Para la primera pregunta tenemos que tener claro que nosotros no sabemos trabajar con presiones pero si sabemos trabajar bien con fuerzas a través de las leyes de Newton, así que usaremos la fórmula $P = \frac{F}{A} \Rightarrow PA = F$, con A la sección sobre la cual se ejerce la presión. Primero calcularemos la presión que ejerce el gas sobre el émbolo, del enunciado sabemos que cumple la relación $P_e V = C_o$, también sabemos que el volumen de un cilindro es su área por su altura, de esta forma, mezclando ambas ecuaciones para obtener la fuerza:

$$F_e = \frac{C_o}{Ay} A \Rightarrow F_e = \frac{C_o}{y}.$$

Ahora calculemos la fuerza que ejerce la presión atmosférica $P_o A = F_o$, finalmente necesitamos la fuerza que ejerce la gravedad sobre el corcho $F_g = mg$. Notamos que solo hemos calculado los módulos de las fuerzas, para ver la dirección notamos que si definimos para arriba en el eje y positivo, y el origen ubicado en la base del cilindro, la presión del gas sobre el émbolo apunta hacia arriba y la presión atmosférica y el peso apuntan hacia abajo. Usando la segunda ley de Newton y matraqueando :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

$$m\ddot{y} = -F_o - F_g + F_e$$

$$\ddot{y} = \frac{C_o}{my} - g - \frac{P_o A}{m}$$

Con esto terminamos la parte a) , donde nos pedían encontrar la ecuación de movimiento. Ahora nos piden encontrar la altura a la que el émbolo alcanza su mayor velocidad, para eso imponemos $\ddot{y} = 0$ pues significa que la pendiente de la velocidad es 0, eso significa que esta en un mínimo o un máximo, pero debido a la forma del problema solo puede ser un máximo.

$$\ddot{y} = 0 \Rightarrow \frac{C_o}{my^*} - g - \frac{P_o A}{m} = 0 \Rightarrow \frac{C_o}{my^*} = g + \frac{P_o A}{m} \Rightarrow y^* = \frac{C_o}{P_o A + mg}$$

Ahora esa es la altura en la cual alcanza su velocidad maxima.

Finalmente nos piden la altura mínima que alcanza, para esto nosotros queremos imponer que la velocidad sea 0 pues esto implica que el cuerpo ya no puede seguir cayendo. Por lo

que partiremos de la ecuacion de movimiento $\ddot{y} = \frac{C_o}{my} - g - \frac{P_o A}{m}$

Para poder resolver esa ecuación utilizaremos un famoso truco de mecánica llamado el truco de mecánica (no pun intended):

$$\ddot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dy} \frac{dy}{dt} = \dot{y} \frac{d\dot{y}}{dy}$$

Aplicando este truco a la igualdad obtenida antes, e integrando.

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \frac{C_o}{my} - g - \frac{P_o A}{m} \\ \dot{y} \frac{d\dot{y}}{dy} &= \frac{C_o}{my} - g - \frac{P_o A}{m} \\ \int_0^{\dot{y}} \dot{y} d\dot{y} &= \int_L^y \left(\frac{C_o}{my} - g - \frac{P_o A}{m} \right) dy \\ \frac{\dot{y}^2}{2} &= \frac{C_o}{m} \ln \left(\frac{y}{L} \right) - \left(g + \frac{P_o A}{m} \right) (y - L)\end{aligned}$$

De esta igualdad queremos imponer $\dot{y} = 0$ de esa forma obtenemos

$$\frac{C_o}{m} \ln \left(\frac{y_{min}}{L} \right) - \left(g + \frac{P_o A}{m} \right) (y_{min} - L) = 0 \implies \frac{C_o}{m} \ln \left(\frac{y_{min}}{L} \right) = \left(g + \frac{P_o A}{m} \right) (y_{min} - L)$$

Que es una ecuacion que se puede resolver intersectando la curva del logaritmo con la funcion afín que se encuentra en el lado derecho. Con esto se termine el problema 1 c:

- P2. Para el problema 2 lo importante es la trigonometría, primero podemos observar que el angulo que hace la horizontal con la barra (que llamaremos ϕ) es igual al angulo que hace la horizontal con la cuerda, esto porque es un triángulo isósceles. Si definimos el origen en el punto R , y en el eje x positivo hacia la derecha y en el eje y positivo hacia arriba. Luego de realizar un DCL, podemos descomponer las fuerzas que actúan. Si consideramos las fuerzas en el eje x tendremos.

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= \sum F_x \\ m\ddot{x} &= T \cos(\phi)\end{aligned}$$

Y ahora que?, Tenemos un problema porque no sabemos como trabajar con una ecuación con 2 incognitas, es necesario que busquemos alguna otra ecuación que nos pueda entregar la informacion que nos hace falta. Si miramos el problema, podria ser util utilizar el teorema del coseno, por si no lo recuerdan aca va:

Para un triangulo de lados a, b y c , y con un angulo θ entre el lado de largo a y el de lado b

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\theta)$$

Si lo aplicamos en nuestro problema, $a = L, b = L, c = x, \theta = \pi - 2\phi$, asi

$$x^2 = L^2 + L^2 + 2L^2 \cos(\pi - 2\phi)$$

Con esto, tenemos una relacion entre x y el $\cos(\pi - 2\phi)$. Pero queremos una relacion entre x y el $\cos(\phi)$. Para lo que usaremos el coseno de la suma, lo recordamos

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

En nuestro caso $\alpha = \pi$ y $\beta = -2\phi$

Entonces, $\cos(\pi - 2\phi) = \cos(\pi)\cos(-2\phi) - \sin(\pi)\sin(-2\phi) = -\cos(2\phi)$ Donde utilizamos que $\cos(\pi) = -1$ y $\sin(\pi) = 0$ Ahora tenemos una relacion entre x y $\cos(2\phi)$ Para lo cual utilizamos la misma relacion anterior pero ahora con $\alpha = \phi$ y $\beta = \phi$

$$\begin{aligned} x^2 &= 2L^2(1 + \cos(2\phi)) \\ x^2 &= 2L^2(1 + \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)) \\ x^2 &= 2L^2(1 + \cos^2(\phi) - (1 - \cos^2(\phi))) \\ x^2 &= 2L^2(2\cos^2(\phi)) \\ \frac{x^2}{4L^2} &= \cos^2(\phi) \\ \frac{-x}{2L} &= \cos(\phi) \end{aligned}$$

Ahora al fin tenemos una relación entre el $\cos(\phi)$ y x , notamos que tomamos la solución negativa y no la positiva, esto lo hacemos porque la distancia x nosotros la consideramos negativa segun nuestro sistema de coordenadas. Ahora hay dos (en verdad hay mas), posibilidades, una seria reemplazar x en la ecuación o reemplazar el $\cos(\phi)$.

Yo quiero eliminar la x , porque es una variable que no es tan ilustrativa, asi que derivaremos la relación que obtuvimos en funcion del tiempo

$$\begin{aligned}\frac{-x}{2L} &= \cos(\phi) \\ \frac{-\dot{x}}{2L} &= -\sin(\phi)\dot{\phi} \\ \frac{\ddot{x}}{2L} &= \cos(\phi)\omega_0^2 \\ \ddot{x} &= 2L \cos(\phi)\omega_o^2\end{aligned}$$

Ahora que tenemos la segunda derivada de x , podemos reemplazarla en nuestra ecuación de la segunda ley de Newton

$$m\ddot{x} = T \cos(\phi) \quad (1)$$

$$2mL \cos(\phi)\omega_o^2 = T \cos(\phi) \quad (2)$$

$$2mL\omega_o^2 = T \quad (3)$$

Con esto tenemos que la tensión es igual a la multiplicación de constantes, por lo que es una constante.

Ahora tenemos que hacer la parte b), donde nos piden el valor de la velocidad angular ω_o de la barra para que la carga se desprege justo cuando esta al borde del río.

Para eso usaremos la ecuación de movimiento para el eje y

$$\begin{aligned}m\ddot{y} &= \sum F_y \\ 0 &= -mg + N + T \sin(\phi) \\ mg &= N + 2mL \cos(\phi)\omega_o^2\end{aligned}$$

El problema es que ahora tenemos esta ecuación y necesitamos más información. Si leemos el enunciado podemos notar que nos piden la velocidad angular tal que se desprege justo al borde del río. La condición de despegue se puede traducir en $N = 0$. Ahora necesitamos deshacernos del $\cos(\phi)$, para esto usaremos que el despegue tiene que pasar al borde del río, sabemos que el río, la barra y la cuerda tienen largo L , por lo que el triángulo que forman es uno equilátero, entonces $\phi = \frac{\pi}{3}$, entonces $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, reemplazando tenemos:

$$mg = 2mL \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_o^2$$

$$\omega_o^2 = \frac{g}{L\sqrt{3}}$$

Con esto podemos obtener la velocidad angular para que se cumpla la condición pedida.

$$\omega_o = \sqrt{\left(\frac{g}{L\sqrt{3}}\right)}$$

P3. Para este problema utilizaremos coordendas polares, recordamos

Posición: $\vec{r}(t) = \rho \hat{\rho}$

Velocidad: $\vec{r} = \vec{v}(t) = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta}$

Aceleración: $\vec{r} = \vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{\rho} + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \hat{\theta}$

(En la literatura tambien es usado el angulo ϕ , pero es sólo notación, yo hare el esfuerzo de solo usar θ en coordendas polares/cilindricas porque es la notación que ocupa el profesor en las clases)

Ahora en nuestro problema tenemos que el punto P es tirado con aceleracion a_o , como la cuerda es inextensible, podemos decir que toda la cuerda acelera con la misma aceleración, tambien tenemos que al estar la cuerda sobre el cilindro esta va doblandose, de manera que cuando llega a la masa, podemos identificar la direccion de la aceleración con la dirección angular $\hat{\theta}$, por lo que diremos $a_\theta = a_o$.

Habiendo hecho este análisis, podemos empezar a resolver el problema. Primero nos piden calcular el angulo θ_D , que es el angulo en el cual se despega, haciendo un DCL, vemos que en la coordenada ρ , tenemos la Normal y una componente del peso. De esta forma aplicando la segunda ley de Newton.

$$ma_\rho = N - mg \sin(\theta)$$

$$m(\ddot{r} - \rho \dot{\theta}^2) = N - mg \sin(\theta)$$

Ahora necesitamos adecuar esta ecuación a nuestras condiciones y a lo que nos piden, primero tenemos que el radio $\rho = R = cte.$, entonces $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. Ahora respecto a lo que nos piden, notamos que queremos el angulo en el cual se despega, asi que la normal debe ser 0, ie. $N = 0$, reemplazando estas condiciones en nuestra ecuación tenemos.

$$-m\rho \dot{\theta}^2 = -mg \sin(\theta)$$

$$\rho \dot{\theta}^2 = g \sin(\theta)$$

Ahora necesitamos deshacernos de $\dot{\theta}^2$, para eso utilizaremos el otro razonamiento del problema $a_o = a_\theta$, partiendo desde aca, utilizando la definicion de a_θ $a_o = a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}$, aplicando $\dot{\rho} = 0$ y aplicando el truco de mecánica.

$a_o = \rho\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ Ahora integramos

$$\begin{aligned} a_o &= \rho\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \\ \int_0^\theta a_o d\theta &= \int_0^{\dot{\theta}} R\dot{\theta} d\dot{\theta} \\ a_o\theta &= R\frac{\dot{\theta}^2}{2} \end{aligned}$$

Ahora que tenemos una expresión para $R\dot{\theta}^2$, podemos reemplazarla en nuestra otra ecuación y así encontrar una ecuacion para θ_D

$$\boxed{2a_o\theta_D = g\sin(\theta_D)}$$

Ahora queremos encontrar el ángulo para el cual la cuerda se destensa, asumiendo que no se despega antes, es importante considerar eso, porque si no estuviera pegado al cilindro, entonces las ecuaciones de movimiento serían distintas.

Ahora haremos Newton en la direccion $\hat{\theta}$

$$\begin{aligned} ma_\theta &= T - mg\cos(\theta) \\ ma_o &= -mg\cos(\theta_T) \\ -\frac{a_o}{g} &= \cos(\theta_T) \end{aligned}$$

Donde en la segunda linea impusimos que la tension sea 0, y llamamos al ángulo θ_T . Utilizando la función $\arccos()$, podemos encontrar ese ángulo.

Ahora para la parte c, queremos darnos un valor en particular para a_o y ver que ocurre primero, si la destensión o el despegue. Con $a_o = \frac{g}{2}$, tenemos:

La ecuación para la condicion de despegue se ve :

$$\boxed{g\theta_D = g\sin\theta_D)}$$

Que es una igualdad que se cumple para ángulos pequeños.
Por otro lado la condición de destensión:

$$-\frac{1}{2} = \cos \theta_T$$

Lo que significa que el angulo $\theta_T = \frac{2\pi}{3}$

Claramente un angulo pequeño es menor que $\frac{2\pi}{3}$. Con esto terminamos esta pregunta y la pauta, Animo con el estudio ! c: